Sonderdruck

ABHANDLUNGEN DER DEUTSCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

Klasse für Mathematik, Physik und Technik
Jahrgang 1965 Heft 4

WOLFDIETRICH MÜLLER

QUALITATIVE UNTERSUCHUNG DER LÖSUNGEN NICHTLINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG NACH DER DIREKTEN METHODE VON LJAPUNOV

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN
1965

Berlin, H. U., Wiss.
Promotion
29. Sep. 1965

Vorgelegt von Hrn. K. Schröder in der Klassensitzung vom 14. 1. 1965

Zum Druck genehmigt am gleichen Tage, ausgegeben am 30. 10. 1965

Erschienen im Akademie-Verlag GmbH, 108 Berlin, Leipziger Straße 3 – 4
Copyright 1965 by Akademie-Verlag GmbH
Lizenznummer: 202 · 100/479/65
Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer", 582 Bad Langensalza
Bestellnummer: 2001/65/I/4 · ES 19 B 4 · Preis: MDN 12,10

Inhalt

Einleitung 5

1. Definitionen und Sätze 7
1.1. Bezeichnungen 7
1.2. Beschränktheitsdefinitionen 8
1.3. Stabilitätsdefinitionen 9
1.4. Sätze der Ljapunovschen Theorie 11
1.5. Stabilität linearer Differentialgleichungen 13

2. Beschränktheitsuntersuchungen 17
2.1. Beschränktheitskriterien für die Liénardsche Gleichung 18
2.2. Spezialfälle 19

3. Stabilitätsuntersuchungen 27
3.1. Stabilitätskriterien für die Differentialgleichung $x'' + F(x, x', t) = 0$ 27
3.2. Konstruktion Ljapunovscher Funktionen 30
3.3. Spezialfälle 35

4. Beschränktheits- und Stabilitätsuntersuchungen in periodischen Systemen 38
4.1. Verwendung von Näherungslösungen 40
4.2. Bestimmung der Fehlerschranken 42
4.3. Duffingsche Gleichung 46
4.4. Boittesche Gleichung 52

5. Abschätzung der Übergangsprozesse 58
5.1. Ljapunovsche Funktionen für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . 59
5.2. Abschätzungen für die Übergangsprozesse nichtlinearer Gleichungen 63

Zusammenfassung 67

Literaturverzeichnis 68

UNIV. LEIDEN BIBL.

Einleitung

Durch drei Veröffentlichungen wurde am Ende des vorigen Jahrhunderts ein neuer Zweig der Mathematik begründet: eine — häufig kurz als „Nichtlineare Mechanik" bezeichnete — Theorie der durch nichtlineare Differentialgleichungen beschriebenen Schwingungen in mechanischen oder elektrischen Systemen. Diese Theorie hat, besonders in den letzten zwanzig Jahren, eine ungeheuere Ausweitung erfahren; trotzdem sind noch heute drei unterschiedliche, durch diese drei grundlegenden Arbeiten ausgelöste Forschungsrichtungen erkennbar. H. Poincarés Untersuchungen über die Himmelsmechanik [49] enthalten die erste der zahlreichen heute bekannten analytischen Methoden zur Ermittlung periodischer Lösungen in nichtlinearen Systemen (vgl. die Monographien von Krylov-Bogoljubov [24], Andronov-Chaikin [2], Minorsky [36], Bogoljubov-Mitropol'skij [6]), seine Arbeit über die durch gewisse Differentialgleichungen beschriebenen Kurven [50] wurde richtungweisend für die Entwicklung der geometrisch-qualitativen Theorie insbesondere der Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu der Form, in der sie etwa in den Büchern von Nemyckij-Stepanov [40], Coddington-Levinson [11] und Lefschetz [26] dargestellt ist. Und A. M. Ljapunovs Dissertation über das allgemeine Problem der Stabilität einer Bewegung [31] wurde zum Ausgangspunkt einer umfassenden Stabilitätstheorie, deren weitere Entwicklung anhand der Monographien von Četaev [10], Malkin [34], LaSalle und Lefschetz [25] und des Ergebnisberichts von W. Hahn [16] verfolgt werden kann. Insbesondere die von Ljapunov begründete direkte Methode, die ohne die Kenntnis analytischer Ausdrücke für die Lösungen der betrachteten Differentialgleichungen ihr Stabilitätsverhalten zu entscheiden gestattet, erwies sich als wertvolles Hilfsmittel zur Behandlung der verschiedenartigsten bei der Untersuchung nichtlinearer Differentialgleichungen auftretenden Probleme. Sie ist — wie Reissig [55] und Yoshizawa [70] zeigten — nach geringfügigen Abwandlungen auch zum Nachweis beschränkter Lösungen geeignet und ermöglicht — nach Untersuchungen von Krasovskij [23] — in gewissen Fällen Abschätzungen für die Geschwindigkeit der gegenseitigen Annäherung asymptotisch gleicher Lösungen.

Die Ljapunovsche direkte Methode wird daher mehr und mehr auch als Hilfsmittel in der qualitativen Theorie der nichtlinearen Schwingungen mit einem Freiheitsgrad herangezogen und verdrängt die dort bisher benutzten geometrisch-analytischen Methoden. So haben Reissig [57], [61] und Bhatia [3] durch Konstruktion Ljapunovscher Funktionen eine Reihe von Sätzen über die Beschränktheit und Stabilität der Lösungen der Differentialgleichungen

$$x'' + F(x') + g(x) = e(t) \tag{0.1}$$

(Rayleighsche Gleichung),

$$x'' + f(x)\,x' + g(x) = e(t) \tag{0.2}$$

(Liénardsche oder Cartwright-Littlewoodsche Gleichung)

und

$$x'' + f(x, x')\,x' + g(x) = e(t) \tag{0.3}$$

bewiesen; eine Übersicht über die für diese Gleichungen mit den verschiedenen Methoden erzielten Ergebnisse gibt der 1963 erschienene Bericht von REISSIG-SANSONE-CONTI [62].

In der vorliegenden Arbeit[1]) werden diese Untersuchungen weitergeführt, sie werden in einigen Fällen, wo die angewandten Methoden dies gestatten, auch auf allgemeinere Differentialgleichungen der Gestalt

$$x'' + F(x, x', t) = 0 \tag{0.4}$$

ausgedehnt. Es werden neue Gesichtspunkte zur Konstruktion LJAPUNOVscher Funktionen entwickelt, durch Verbindung mit geometrisch-analytischen Überlegungen und gewissen Resultaten der quantitativen Theorie wird die Leistungsfähigkeit der direkten Methode weiter gesteigert.

Die Arbeit gliedert sich in fünf Kapitel, deren erstes einige im weiteren benötigte Definitionen und Sätze bringt. Die Kapitel 2, 3 und 4 enthalten Beschränktheits- und Stabilitätsuntersuchungen auf der Grundlage der LJAPUNOVschen direkten Methode, im abschließenden fünften Kapitel werden Abschätzungen für den zeitlichen Verlauf der zu stabilen Lösungen der Gleichung (0.4) hinleitenden Übergangsprozesse gegeben.

Das Literaturverzeichnis umfaßt nur die Titel, die in der Arbeit zitiert werden. Umfangreiche Literaturhinweise zu den behandelten Problemen finden sich in den Berichten von CESARI [9], HAHN [16] und REISSIG-SANSONE-CONTI [62].

---

[1]) An der Humboldt-Universität Berlin im Juli 1964 eingereichte Dissertation; Referenten: Prof. Dr. phil. habil. R. REISSIG, Prof. Dr. phil. habil. K. SCHRÖDER. Die Arbeit entstand aus Forschungsaufträgen im Rahmen der Tätigkeit in der Abteilung „Nichtlineare Mechanik und Regelungstheorie“ im Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, unter der Leitung von Professor Dr. R. REISSIG, dem der Verfasser auch an dieser Stelle für stetes Interesse und zahlreiche Anregungen danken möchte.

1. Definitionen und Sätze

In diesem Kapitel werden einige — teils bekannte, teils etwas verallgemeinerte — Definitionen und Sätze zusammengestellt, die im Verlauf der weiteren Untersuchungen benötigt werden.

1.1. Bezeichnungen

Es werden Systeme zweier Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\left.\begin{aligned} x' &= F(x, y, t), \\ y' &= G(x, y, t) \end{aligned}\right\} \tag{1.1.1}$$

betrachtet. Dabei bedeutet der Strich die Ableitung nach der unabhängigen Veränderlichen t. In Anlehnung an Begriffsbildungen der Mechanik wird t häufig als Zeit interpretiert, die Lösungen des Systems (1.1.1) werden als Bewegungen im (x, y, t)-Bewegungsraum, ihre Projektionen in die (x,y)-Ebene (Phasenebene) als Phasenbahnen oder Trajektorien bezeichnet.

Die Lösung, die zum Zeitpunkt $t = t_0$ vom Punkt $P_0 \sim (x_0, y_0)$ ausgeht, wird in der Form

$$P(t) = P(t, P_0, t_0) \sim (x(t, x_0, y_0, t_0), y(t, x_0, y_0, t_0)) \tag{1.1.2}$$

geschrieben.

Gelegentlich werden Systeme (1.1.1) untersucht, deren rechte Seiten nicht im gesamten Bewegungsraum $R_2 \times I$ $(R_2 = \{|x| < \infty, \ |y| < \infty\}, \ I = \{0 \leqq t < \infty\})$ erklärt sind. Über die Funktionen F, G wird daher folgendes vorausgesetzt:

Voraussetzung 1.1.1: Für alle $t \in I$ sei $A_t \subseteq R_2$ ein den Punkt (0, 0) enthaltender einfach zusammenhängender (nicht notwendig beschränkter) Bereich der Phasenebene, A_t als Funktion von t sei gleichmäßig stetig für $t \in I$, es gelte $A_1 \supseteq A_t \supseteq A_2 \supset U_\varepsilon$, $U_\varepsilon = \{x^2 + y^2 \leqq \varepsilon^2\}$, für ein geeignetes $\varepsilon > 0$. Die Funktion $F(x, y, t)$, $G(x, y, t)$ seien für $t \in I$, $(x, y) \in A_t$ definiert und dort so beschaffen, daß jede Lösung (1.1.2) mit $P_0 \in A_{t0}$ $(t_0 \in I)$ für $t \geqq t_0$ existiert, eindeutig bestimmt ist und von den Argumenten t, x_0, y_0, t_0 stetig abhängt.

Weiter wird durch die folgenden Forderungen in A_t ein verallgemeinerter Nullpunktsabstand eingeführt:

Voraussetzung 1.1.2. Für $t \in I$, $(x, y) \in A_t$ sei eine stetige Funktion $h(x, y, t)$ mit

$$h_1(x, y) \leqq h(x, y, t) \leqq h_2(x, y); \ h_2(0, 0) = 0, \ h_1(x, y) > 0 \quad \text{für} \quad x^2 + y^2 > 0$$

derart erklärt, daß für jeden Wert $C > 0$ die Gleichung

$$h(x, y, t) = C \tag{1.1.3}$$

eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve $S_t(C)$ definiert und die Kurvenscharen $\{S_t(C)\}$ $(t \geqq t_0)$ den folgenden Bedingungen genügen:

1. Jede Kurve $S_t(C)$ $(C < \infty)$ verläuft ganz im Innern von A_t.
2. Der von $S_t(C)$ umschlossene (abgeschlossene) Bereich sei mit $A_t(C)$ bezeichnet; dann gilt

$$A_t(C) \subset A_t(C') \quad \text{für} \quad C < C' .$$

3. Für jeden inneren Punkt $P \in A_t$ existiert ein $C < \infty$ mit $P \in A_t(C)$.

Die gleichen Bedingungen mögen die durch $h_i(x, y) = C$ definierten Kurven $S_i(C)$ und die von ihnen berandeten Bereiche $A_i(C)$ bezüglich der Bereiche A_i $(i = 1, 2)$ erfüllen.

1.2. Beschränktheitsdefinitionen

Die Folgen ineinandergeschachtelter Bereiche $A_t(C)$ $(0 \leqq C \leqq \infty;\ A_t(\infty) = A_t)$ werden nun benutzt, um die von YOSHIZAWA [70] gegebenen Definitionen für verschiedene Formen der Beschränktheit der Lösungen des Systems (1.1.1) in einer Weise zu formulieren, die ihre Anwendung auch auf Systeme gestatten, welche nur in einem Teil des Bewegungsraums erklärt sind. Die Definitionen von YOSHIZAWA (vgl. auch [3], [62]) sind hierin jeweils als Spezialfall $(A_t = R_2,\ h(x, y, t) = \sqrt{x^2 + y^2})$ mit enthalten.

Definition 1.2.1. Die Lösung $P(t) = P(t, P_0, t_0)$, $t \geqq t_0$, des Differentialgleichungssystems (1.1.1) heißt beschränkt (bounded), wenn es ein C_0 gibt, so daß

$$P(t) \in A_t(C_0) \quad \text{für} \quad t \geqq t_0 .$$

Definition 1.2.2. Die Lösungen heißen gleichmäßig beschränkt (uniformly bounded), wenn für alle Lösungen $P(t, P_0, t_0)$ mit $P_0 \in A_{t0}(C)$ $(C > 0$, beliebig) und $t_0 \geqq 0$ ein $C_0 \geqq C$ existiert, so daß

$$P(t, P_0, t_0) \in A_t(C_0) \quad \text{für} \quad t \geqq t_0$$

gilt. Dabei hängt C_0 nur von C, nicht aber von t_0 ab.

Definition 1.2.3. Die Lösungen heißen in Zukunft beschränkt (ultimately bounded), wenn ein C_0 derart existiert, daß jede Lösung $P(t, P_0, t_0)$ nach Ablauf einer (individuellen) Übergangszeit $\tau = \tau(P_0, t_0)$ im Bereich $A_t(C_0)$ verbleibt:

$$P(t, P_0, t_0) \in A_t(C_0) \quad \text{für} \quad t \geqq t_0 + \tau .$$

Definition 1.2.4. Die Lösungen heißen in Zukunft gleichmäßig beschränkt (uniformly ultimately bounded), wenn ein C_0 derart existiert, daß jede Lösung $P(t, P_0, t_0)$ mit $P_0 \in A_{t0}(C)$ $(C > 0$, beliebig) und $t_0 \geqq 0$ nach Ablauf einer Übergangszeit $\tau = \tau(C)$ im Bereich $A_t(C_0)$ verbleibt:

$$P(t, P_0, t_0) \in A_t(C_0) \quad \text{für} \quad t \geqq t_0 + \tau .$$

Dabei hängt τ nur von C, nicht aber von t_0 ab.

Definition 1.2.5. Ein (zeitunabhängiger) beschränkter Bereich in der (x,y)-Phasenebene, in dem jede Lösung des Systems nach gewisser Zeit verbleibt, heißt endgültige Schranke für die Lösungen des Systems (1.1.1).

Unter den Voraussetzungen der Definitionen 1.2.3 und 1.2.4 ist der Bereich $A_1(C_0)$ (und auch jeder Bereich $A \supset A_1(C_0)$) eine endgültige Schranke.

Systeme, deren Lösungen eine derartige endgültige Schranke besitzen (also in Zukunft beschränkt sind), werden nach LEVINSON [30] als dissipativ oder der Klasse D zugehörig bezeichnet (vgl. auch [55], [48], [62]).

Definition 1.2.6. Ein abgeschlossener, beschränkter, von einem doppelpunktfreien Weg W berandeter Bereich B heißt relative Schranke für die Lösungen des Systems (1.1.1), wenn für jede Lösung mit $P_0 \in B$ auch $P(t, P_0, t_0) \in B$ für $t \geqq t_0$ gilt.

Die Berandung W wird in diesem Falle entweder von den Phasenbahnen des Systems von außen nach innen durchsetzt oder besteht (in gewissen Abschnitten und Zeitintervallen) selbst aus Phasenbahnen.

Satz 1.2.1 (Massera [35]). Sind die rechten Seiten des Systems (1.1.1) bezüglich t periodisch,

$$F(x, y, t + T) = F(x, y, t) , \quad G(x, y, t + T) = G(x, y, t) , \tag{1.2.1}$$

existieren alle Lösungen für $t \geqq t_0$ und ist mindestens eine Lösung für $t \to \infty$ beschränkt, dann besitzt das System mindestens eine periodische Lösung der Periode T.

Folgerung 1.2.1. Existiert für die Lösungen des Systems (1.1.1), (1.2.1) eine endgültige oder relative Schranke, so besitzt das System mindestens eine periodische Lösung der Periode T.

1.3. Stabilitätsdefinitionen

Um das Stabilitätsverhalten einer (für $t \geqq t_0$ beschränkten) Lösung $P^0(t) \sim (x^0(t), y^0(t))$ des Systems (1.1.1) (die man dann gewöhnlich ungestörte Bewegung nennt) zu beurteilen, betrachtet man benachbarte Lösungen $P(t) = P^0(t) + Q(t)$. Die Zusatzglieder $Q(t) \sim (u(t), v(t))$ bezeichnet man als Störungen, sie genügen dem Differentialgleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} u' &= F(x^0(t) + u, y^0(t) + v, t) - F(x^0(t), y^0(t), t) = f(u, v, t) , \\ v' &= G(x^0(t) + u, y^0(t) + v, t) - G(x^0(t), y^0(t), t) = g(u, v, t) \end{aligned}\right\} \tag{1.3.1}$$

(Gleichungen der gestörten Bewegung). Dieses System besitzt die triviale Lösung $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ (Ruhelage), die stets als isolierte Gleichgewichtslage angenommen wird. Aus [16] seien die folgenden Definitionen zitiert:

Definition 1.3.1. Die Ruhelage des Systems (1.3.1) und damit die Lösung $P^0(t)$ von (1.1.1) heißt im Sinne von Ljapunov stabil bezüglich der Anfangswerte (im folgenden einfach: stabil), wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so angeben läßt, daß für alle Lösungen mit $Q_0 \in U_\delta$ $(U_\delta = \{u^2 + v^2 \leqq \delta^2\})$

$$Q(t, Q_0, t_0) \in U_\varepsilon \quad \text{für} \quad t \geqq t_0$$

gilt.

Definition 1.3.2. Eine Lösung heißt instabil, wenn sie nicht stabil ist.

Definition 1.3.3. Die Ruhelage von (1.3.1) und damit die Lösung $P^0(t)$ von (1.1.1) heißt gleichmäßig stabil, wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so angeben läßt, daß für alle Lösungen mit $Q_0 \in U_\delta$ und $t_0 \geqq 0$

$$Q(t, Q_0, t_0) \in U_\varepsilon \quad \text{für} \quad t \geqq t_0$$

gilt. Dabei hängt δ nur von ε, nicht aber von t_0 ab.

Definition 1.3.4. Die Ruhelage von (1.3.1) und damit die Lösung $P^0(t)$ von (1.1.1) heißt asymptotisch stabil, wenn sie a) stabil ist und b) ein $\delta_0 > 0$ derart vorhanden ist, daß aus $Q_0 \in U_{\delta_0}$ sogar

$$\lim_{t \to \infty} u(t, u_0, v_0, t_0) = \lim_{t \to \infty} v(t, u_0, v_0, t_0) = 0 \tag{1.3.2}$$

folgt.

Definition 1.3.5. Die Gesamtheit aller Punkte Q_0 des (u,v)-Phasenraumes, von denen Bewegungen ausgehen, die der Beziehung (1.3.2) genügen, heißt Einzugsbereich der Ruhelage. Umfaßt der Einzugsbereich alle Punkte, von denen überhaupt Lösungen ausgehen, so heißt die Ruhelage asymptotisch stabil im Großen. Kommen dafür alle Punkte des

Phasenraumes in Frage, so spricht man von asymptotischer Stabilität im Ganzen. Diese Bezeichnungen gelten in sinngemäßer Übertragung auch für die Lösung $P^0(t)$ des Systems (1.1.1). Ist $P^0(t)$ asymptotisch stabil im Großen, so gilt das gleiche für alle anderen Lösungen des Systems (1.1.1), das System heißt dann (nach [51]) äußerst stabil.

Definition 1.3.6. Die Ruhelage von (1.3.1) und damit die Lösung $P^0(t)$ von (1.1.1) heißt gleichmäßig asymptotisch stabil, wenn sie a) gleichmäßig stabil ist und b) sich zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Übergangszeit τ derart bestimmen läßt, daß für alle Lösungen mit $Q_0 \in U_\eta$ (η von ε unabhängig) und $t_0 \geqq 0$

$$Q(t, Q_0, t_0) \in U_\varepsilon \qquad \text{für} \qquad t \geqq t_0 + \tau$$

gilt. Dabei hängt τ nur von ε, nicht aber von t_0 ab.

Satz 1.3.1 (Hahn [16]). Es sei

$$r(t) = |O\,Q(t)| = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)} \,. \tag{1.3.3}$$

Notwendig und hinreichend für gleichmäßig asymptotische Stabilität der Ruhelage von (1.3.1) ist die Existenz von zwei Funktionen $\chi(s)$ (für $0 \leqq s \leqq h$ erklärt, stetig, monoton zunehmend, $\chi(0) = 0$) und $\Theta(s)$ (für alle $s \geqq 0$ erklärt, stetig, monoton zunehmend, $\lim_{s \to \infty} \Theta(s) = 0$), mit denen für alle $Q_0 \in U_\eta$ und $t_0 \geqq 0$ die Ungleichung

$$r(t, r_0, t_0) \leqq \chi(r_0)\, \Theta\,(t - t_0) \quad (t \geqq t_0) \tag{1.3.4}$$

besteht.

Fordert man für die Funktion $\Theta(t - t_0)$ ein exponentielles Abklingen, so wird man zum Begriff der exponentiellen Stabilität (Persidskij [47]) geführt:

Definition 1.3.7. Die Ruhelage von (1.3.1) und damit die Lösung $P^0(t)$ von (1.1.1) heißt exponentiell stabil, wenn es zwei positive Konstanten $\varkappa$, ϑ derart gibt, daß für $Q_0 \in U_\eta$ und $t \geqq t_0$ die Ungleichung

$$r(t, r_0, t_0) = \varkappa\, r_0\, e^{-\vartheta\,(t - t_0)} \tag{1.3.5}$$

erfüllt ist.

Sind die Lösungen von (1.3.1) nicht exponentiell stabil, ist es aber möglich, eine Abschätzung (1.3.4) mit

$$\Theta\,(t - t_0) = (t - t_0)^{-\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

anzugeben, so spricht man nach Krasovskij [23] von schwach intensivem Verhalten der Lösungen. Für die Funktion χ kann man in diesem Fall keine lineare Funktion $\varkappa\, r_0$ ($\varkappa = \text{const}$) (vgl. [16]) wählen, da

$$\lim_{r_0 \to 0} \frac{\chi(r_0)}{r_0} = \infty$$

gelten muß [38].

Besitzen die rechten Seiten des Systems (1.1.1) stetige partielle Ableitungen nach x und y, so kann man den Stabilitätsuntersuchungen statt (1.3.1) auch die linearisierten Variationsgleichungen des Systems (1.1.1) für die Lösung $P^0(t)$,

$$\left.\begin{aligned} u' &= F_x(x^0(t), y^0(t), t)\, u + F_y(x^0(t), y^0(t), t)\, v \,, \\ v' &= G_x(x^0(t), y^0(t), t)\, u + G_y(x^0(t), y^0(t), t)\, v \,, \end{aligned}\right\} \tag{1.3.6}$$

zugrundelegen. Es gilt

Satz 1.3.2 (Krasovskij [23]). Ist die Ruhelage des Systems (1.3.6) exponentiell stabil, so ist auch die Lösung $P^0(t)$ des Systems (1.1.1) exponentiell stabil.

Ein von Opial [44] entwickeltes Verfahren ermöglicht es, mit Hilfe der linearisierten Variationsgleichungen sogar auf asymptotische bzw. exponentielle Stabilität im Großen zu schließen (vgl. [3], [38], [62]):

Satz 1.3.3 (Reissig-Sansone-Conti [62]). Es sei B eine relative Schranke für die Lösungen des Systems (1.1.1), $\{L_B\}$ die für $t \geqq t_0$ in B eingeschlossene Lösungsschar. Wenn die Ruhelagen der Variationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} u' &= F_x(x(t), y(t), t)\, u + F_y(x(t), y(t), t)\, v\,, \\ v' &= G_x(x(t), y(t), t)\, u + G_y(x(t), y(t), t)\, v \end{aligned}\right\} \tag{1.3.7}$$

für alle Lösungen $L \sim P(t) = (x(t), y(t))$ aus $\{L_B\}$ gleichmäßig [bezüglich der Klasse $\{L_B\}$] asymptotisch oder exponentiell stabil sind, dann besteht in $\{L_B\}$ asymptotische bzw. exponentielle Stabilität, der Einzugsbereich (jeder beliebigen Lösung aus $\{L_B\}$) ist mindestens gleich B.

Folgerung 1.3.1. Ist B gleichzeitig endgültige Schranke, so besteht asymptotische Stabilität im Großen, das System (1.1.1) ist äußerst stabil.

Die Definitionen 1.3.1—1.3.7 betreffen — wie schon erwähnt — die Stabilität bezüglich der Anfangsstörungen und setzten voraus, daß das System (1.3.1) die Ruhelage $u = 0$, $v = 0$ als Lösung besitzt. Da in realen physikalischen Systemen die beschreibenden Differentialgleichungen — die stets idealisierten Modellen entsprechen — meist nur genähert erfüllt sind, wurde, erstmals von Dubošin, ein allgemeinerer Stabilitätsbegriff eingeführt:

Definition 1.3.8. Neben (1.3.1) wird das „gestörte" Differentialgleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} u' &= f(u, v, t) + \varphi(u, v, t)\,, \\ v' &= g(u, v, t) + \psi(u, v, t) \end{aligned}\right\} \tag{1.3.8}$$

betrachtet. Die Ruhelage des Systems (1.3.1) heißt total stabil (oder stabil bei beständig wirkenden Störungen), wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei positive Zahlen $\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon)$ derart finden lassen, daß für jede Lösung $Q(t, Q_0, t_0)$ des Systems (1.3.8)

$$\tilde{Q}(t, Q_0, t_0) \in U_\varepsilon \qquad \text{für} \qquad t \geq t_0$$

gilt, sofern nur

$$Q_0 \in U_{\delta_1}$$

und für $Q \in U_\varepsilon$, $t \geqq t_0$

$$\sqrt{\varphi^2(u, v, t) + \psi^2(u, v, t)} < \delta_2$$

ist.

Satz 1.3.4 (Malkin [33]). Ist die Ruhelage des Systems (1.3.1) gleichmäßig asymptotisch stabil, so ist sie total stabil.

1.4. Sätze der Ljapunovschen Theorie

Die direkte Methode von Ljapunov ([31], [16], [34]) verwendet, um das Stabilitätsverhalten der Lösungen des Systems

$$\left.\begin{aligned} u' &= f(u, v, t)\,, \\ v' &= g(u, v, t) \end{aligned}\right\} \tag{1.3.1}$$

zu beurteilen, eine skalare Funktion $V(u, v, t)$ (Ljapunovsche Funktion), die in einem Bereich $U_\eta \times I$ des (u,v,t)-Bewegungsraumes erklärt ist, dort stetig ist (unstetige Funktionen unter zusätzlichen Bedingungen verwendet [56]) und stetige (eventuell stückweise stetige) partielle Ableitungen nach u, v, t besitzt. Sie wird als positiv definit:

$$V(u, v, t) \geqq W_1(u, v) > 0 \qquad \text{für} \qquad u^2 + v^2 > 0$$

und als gleichmäßig klein:

$$V(u, v, t) \leqq W_2(u, v)\,, \qquad W_2(0, 0) = 0$$

vorausgesetzt.

Mit Hilfe des Systems (1.3.1) wird die totale zeitliche Ableitung gebildet:

$$V'(u, v, t) = V_u f(u, v, t) + V_v g(u, v, t) + V_t ; \tag{1.4.1}$$

sie heißt negativ semidefinit, wenn

$$V'(u, v, t) \leqq 0 ,$$

und negativ definit, wenn

$$V'(u, v, t) \leqq - W_3(u, v) , \qquad W_3(u, v) > 0 \qquad \text{für} \qquad u^2 + v^2 > 0$$

gilt.

Die folgenden Sätze (vgl. etwa [16]) werden für die weiteren Untersuchungen benötigt:

Satz 1.4.1. Läßt sich eine positiv definite Funktion $V(u, v, t)$ angeben, deren für das System (1.3.1) gebildete Ableitung V' negativ semidefinit ist, so ist die Ruhelage des Systems stabil. Ist $V(u, v, t)$ zusätzlich gleichmäßig klein, so ist die Stabilität gleichmäßig.

Satz 1.4.2. Läßt sich eine positiv definite, gleichmäßig kleine Funktion $V(u, v, t)$ angeben, deren für das System (1.3.1) gebildete Ableitung negativ definit ist, so ist die Ruhelage gleichmäßig asymptotisch stabil.

Die Untersuchungen von Yoshizawa [70], Reissig [55], [62] und Bhatia [3] haben ergeben, daß Ljapunovsche Funktionen auch zum Nachweis in Zukunft beschränkter Lösungen geeignet sind: Ist ein System im gesamten Phasenraum definiert, so kann man [55] Ljapunovsche Funktionen in einer Umgebung des Unendlichen betrachten; vollständige Instabilität des unendlich fernen Punktes bedeutet Beschränktheit aller Lösungen.

Für Systeme (1.1.1) unter Voraussetzung 1.1.1, deren Definitionsbereich A_t nur einen Teil der (x,y)-Phasenebene umfaßt, hat man die von der Ljapunovschen Funktion bei Annäherung an den Rand des Definitionsbereiches zu erfüllenden Bedingungen etwas anders zu formulieren. Mit den in Voraussetzung 1.1.2 eingeführten Bezeichnungen gilt der folgende

Satz 1.4.3. Die Lösungen des Systems (1.1.1) sind in Zukunft gleichmäßig beschränkt, wenn eine Funktion $V(x, y, t)$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

(I) $V(x, y, t)$ ist erklärt für $t \in I$, $(x, y) \in [A_t - A_t(C^*)]$.

(II) Zu jedem $c > 0$ existiert ein $C < \infty$ derart, daß für beliebiges $t \in I$ und $(x, y) \in [A_t - A_t(C)]$ stets $V(x, y, t) > c$ ist (C hängt nur von c, nicht von t, ab).

(III) Zu jedem $C \geqq C^*$ existiert ein $c < \infty$ derart, daß für beliebiges $t \in I$ und $(x, y) \in [A_t(C) - A_t(C^*)]$ stets $V(x, y, t) < c$ ist (c hängt nur von C, nicht von t, ab).

(IV) Für die mit (1.1.1) gebildete Ableitung gilt $V'(x, y, t) \leqq - W(x, y) < 0$ für $t \in I$, $(x, y) \in [A_t - A_t(C^*)]$.

Beweis. Es sei

$$c_0 = \sup_{t \in I} \left[\sup_{(x, y) \in S_t(C^*)} V(x, y, t) \right];$$

für $c \geqq c_0$ bezeichne $\bar{B}_t(c)$ für jedes $t \in I$ die Menge aller Punkte $(x, y) \in [A_t - A_t(C^*)]$, für die $V(x, y, t) > c$ gilt.

Weiter sei $B_t(c) = A_t - \bar{B}_t(c)$. Dann bildet jeder Bereich $B_t(c)$ $(c \geqq c_0)$ eine — allerdings zeitabhängige — relative Schranke für die Lösungen von (1.1.1): mit $P(t_0) \in B_{t_0}(c)$ gilt wegen (IV) auch $P(t) \in B_t(c)$ für alle $t \geqq t_0$. Da (IV) im gesamten Gebiet $A_t - B_t(c_0)$ besteht, dringt jede Lösung nach einer gewissen Zeit in $B_t(c_0)$ ein. Wir bestimmen die Übergangszeit T, nach deren Verlauf eine Lösung $P(t)$ mit beliebigem Anfangspunkt $P(t_0) \in A_{t_0}(C)$ $(C \geqq 0)$ den Bereich $B_t(c_0)$ erreicht.

Für $C \leqq C^*$ ist $A_{t_0}(C) \subset B_{t_0}(c_0)$, also $T = 0$ zu setzen. Wir betrachten nun den Fall $P(t_0) \in [A_{t_0}(C) - A_{t_0}(C^*)]$ $(C > C^*$, beliebig). Es sei

$$c = \sup_{t \in I} \left[\sup_{(x, y) \in [A_t(C) - A_t(C^*)]} V(x, y, t) \right],$$

dann gilt $V(t_0) \leqq c$ [mit $V(t) = V(x(t), y(t), t)$ bezeichnen wir die Werte von V längs der Bewegung $P(t)$], also $P(t_0) \in B_{t_0}(c)$. Weiter sei

$$\delta = -\sup_{t \in I} \left[\sup_{(x,y) \in [B_t(c) - B_t(c_0)]} V'(x, y, t) \right],$$

dann ist $V'(x, y, t) \leqq -\delta$ für alle Werte x, y, t mit $c_0 \leqq V(x, y, t) \leqq c$; wegen (IV) ist $\delta > 0$.

Dann kann man

$$T = \frac{1}{\delta}(c - c_0)$$

wählen, denn für den Zeitpunkt t_1 zu dem erstmalig $V(t) = c_0$ ist, gilt einerseits

$$V(t_0) - V(t_1) \leqq c - c_0 ,$$

andererseits

$$V(t_0) - V(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} V'(t)\, dt \geqq \delta\,(t_1 - t_0) ,$$

folglich

$$t_1 - t_0 \leqq \frac{1}{\delta}(c - c_0) = T .$$

Sei schließlich

$$C_0 = \sup_{t \in I} \left[\sup_{(x,y) \in B_t(c_0)} h(x, y, t) \right],$$

so gilt $B_t(c_0) \supset A_t(C_0)$ für alle $t \in I$, und der Bereich $A_1(C_0)$ gibt für die Lösungen des Systems (1.1.1) eine endgültige Schranke.

Bemerkung 1.4.1. Ist der Definitionsbereich zeitunabhängig, $A_t = A$ für $t \in I$, so kann man die Bedingungen (II), (III) ersetzen durch

(II′) $V(x, y, t) \geqq W_1(x, y)$, $W_1(x, y) \to \infty$ für $(x, y) \in [A - A(C)]$, $C \to \infty$;

(III′) $V(x, y, t) \leqq W_2(x, y)$, $W_2(x, y) < \infty$ für alle inneren Punkte von A .

1.5. Stabilität linearer Differentialgleichungen

Es werden einige Sätze zitiert, die das Stabilitätsverhalten der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zeitabhängigen Koeffizienten betreffen. Sie werden im folgenden zur Beurteilung der Stabilitätseigenschaften der linearisierten Variationsgleichungen nichtlinearer Systeme benutzt werden.

Satz 1.5.1 (Leonov [27], Staržinskij [68]). Die Lösungen der Differentialgleichung

$$x'' + p(t)\, x' + q(t)\, x = 0 \tag{1.5.1}$$

sind asymptotisch stabil, wenn die Ungleichungen

$$q(t) > 0 , \qquad p(t) > \frac{q'(t)}{2\, q(t)} \tag{1.5.2}$$

erfüllt sind.

Satz 1.5.2 (Levin [28]). Für die Koeffizienten der Gleichung (1.5.1) gelte

$$0 < p \leqq p(t) , \qquad 0 < q_1 \leqq q(t) \leqq q_2 . \tag{1.5.3}$$

Ist

$$p^2 > 4\, q_2 ,$$

so streben alle Lösungen der Gleichung (1.5.1) nichtoszillatorisch gegen die Ruhelage. Für

$$p^2 < 4\, q_2$$

sind oszillierende Lösungen möglich; für das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Maxima von $|x(t)|$ gilt dann

$$\left|\frac{x(t_{n+1})}{x(t_n)}\right| \leqq \Phi(p, q_1, q_2) = \begin{cases} \dfrac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma_2}\, e^{-\left(\frac{\gamma_1}{\tan\gamma_1} - \frac{\pi-\gamma_2}{\tan\gamma_2}\right)} & (0 < p^2 \leqq 4\,q_1)\,, \\ \dfrac{\cosh\gamma_1}{\cos\gamma_2}\, e^{-\left(\frac{\gamma_1}{\tanh\gamma_1} + \frac{\pi-\gamma_2}{\tan\gamma_2}\right)} & (4\,q_1 < p^2 \leqq 4\,q_2)\,, \end{cases}$$

dabei ist

$$\frac{p}{2\sqrt{q_1}} = \begin{cases} \cos\gamma_1 & \left(0 \leqq \gamma_1 < \frac{\pi}{2}\right) \quad (0 < p^2 \leqq 4\,q_1)\,, \\ \cosh\gamma_1 & (p^2 < 4\,q_1)\,, \end{cases}$$

$$\frac{p}{2\sqrt{q_2}} = \cos\gamma_2 \qquad \left(0 \leqq \gamma_2 < \frac{\pi}{2}\right).$$

Es sei

$$\Psi(p, q_1, q_2) = \begin{cases} \Phi(p, q_1, q_2) & (0 < p^2 \leqq 4\,q_2) \\ 0 & (p^2 > 4\,q_2)\,, \end{cases}$$

dann ist das Bestehen der Ungleichung

$$\Psi(p, q_1, q_2) < 1 \tag{1.5.4}$$

hinreichend für asymptotische Stabilität der Ruhelage der Gleichung (1.5.1).

Bemerkung 1.5.1. Wegen

$$\lim_{q_1 \to 0} \cosh\gamma_1\, e^{-\frac{\gamma_1}{\tanh\gamma_1}} = \frac{1}{2}$$

ist

$$\Phi(p, 0, q_2) = \frac{1}{2\cos\gamma_2}\, e^{-\frac{\pi-\gamma_2}{\tan\gamma_2}}.$$

Es sei $\gamma_2^{(0)}$ die Wurzel der Gleichung

$$\frac{1}{2\cos\gamma_2}\, e^{-\frac{\pi-\gamma_2}{\tan\gamma_2}} = 1$$

($\gamma_2^{(0)} \approx 1{,}280$) und

$$\lambda_0 = \frac{1}{4\cos^2\gamma_2^{(0)}} \quad (\lambda_0 \approx 3{,}046)\,,$$

dann folgt aus (1.5.4): Die Ruhelage der Gleichung (1.5.1) mit

$$0 < p \leqq p(t)\,, \qquad 0 \leqq q(t) \leqq q_2 \tag{1.5.5}$$

ist asymptotisch stabil, sofern

$$p^2 > \frac{1}{\lambda_0}\, q_2 \tag{1.5.6}$$

gilt.

Bemerkung 1.5.2. Die Bedingungen (1.5.4), (1.5.6) sind „exakt" im folgenden Sinne: Wenn sie verletzt sind, lassen sich Funktionen $p(t)$, $q(t)$ so angeben, daß die Ruhelage von (1.5.1) instabil ist.

Bemerkung 1.5.3. Die gleichen Bedingungen wurden — in etwas anderer Gestalt — bereits von OPIAL [46] angegeben. Er definiert beispielsweise λ_0 als Wurzel der Gleichung

$$\log\lambda = (\pi + 2\,\mathrm{arc\,cot}\sqrt{4\lambda - 1}\,)/\sqrt{4\lambda - 1}\,.$$

Bemerkung 1.5.4. STARŽINSKIJ [67] gab für asymptotische Stabilität der Ruhelage der Gleichung (1.5.1) unter den Voraussetzungen

$$0 < p_1 \leqq p(t) \leqq p_2\,, \qquad 0 < q_1 \leqq q(t) \leqq q_2 \tag{1.5.7}$$

die Bedingungen

$$p_1 > \sqrt{q_2} - \sqrt{q_1}\,, \quad p_2 < \frac{q_2 + 2\sqrt{q_1 q_2} + 5\,q_1}{\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1}} \tag{1.5.8}$$

an. Von diesen Bedingungen ist nach Satz 1.5.2 die zweite überflüssig, während die erste (nach [28]) durch

$$p = \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1}\right) \tag{1.5.9}$$

ersetzt werden kann. Die Bedingung 1.5.9 ist nicht exakt, obwohl der Faktor $2/\pi$ nicht weiter verkleinert werden kann: Es gilt

$$\Phi\left(\frac{2}{\pi}\left(\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1}\right), q_1, q_2\right) = 1 - \frac{1}{48}\left(1 - \frac{9}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{q_1}{q_2}\right)^3 - \cdots;$$

statt (1.5.6) liefert (1.5.9) nur $p^2 > \frac{4}{\pi^2}\,q_2$.

In der Form

$$q_2 < q_1 + \pi\,p\sqrt{q_1} + \frac{\pi^2}{4}\,p^2$$

entspricht (1.5.9) der von Opial [46] bewiesenen asymptotischen Relation

$$\frac{q_2}{p^2} \sim \frac{q_1}{p^2} + \pi\sqrt{\frac{q_1}{p^2}} \quad \left(\frac{q_1}{p^2} \to \infty\right).$$

Satz 1.5.3 (Jakubovič [20]). Die Koeffizienten der Differentialgleichung (1.5.1) seien periodisch,

$$p\,(t + T) = p(t)\,, \quad q\,(t + T) = q(t)\,, \tag{1.5.10}$$

es sei

$$p_0 = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt\,.$$

Durch die Substitution

$$x = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T p(t)\,dt\right) y$$

wird (1.5.1) übergeführt in

$$y'' + Q(t)\,y = 0\,, \qquad Q(t) = q(t) - \frac{p^2(t)}{4} - \frac{p'(t)}{2}\,. \tag{1.5.11}$$

Es sei

$$Q = \sup Q(t)\,,$$

eine natürliche Zahl n werde so bestimmt, daß

$$n = 0 \qquad \text{für} \quad Q \leqq 0\,,$$

$$\frac{n\,\pi}{T} < \sqrt{Q} \leqq \frac{(n+1)\,\pi}{T} \qquad \text{für} \quad Q > 0$$

ist; weiter sei

$$L(p_0, Q) = \min L_k(p_0, Q) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

und

$$L_k(p_0, Q) = \sqrt{Q}\,\left(\sqrt{Q}\,T - k\,\pi\right) + \frac{p_0^2\,T^2}{\sqrt{Q}\,T - k\,\pi}\,.$$

(Für $\sqrt{Q} \leqq \frac{\pi}{T}$ und $\sqrt{Q} > \frac{\pi}{T}$, $p_0 \leqq \sqrt{Q}$ ist $L = L_0$; L_0 läßt sich in der Form $L_0(p_0, Q) = (Q + p_0^2)\,T$ schreiben.)

Für die Ruhelage der Gleichung (1.5.1), (1.5.10) gelten dann folgende Aussagen:
Ist $p_0 < 0$, so ist die Ruhelage instabil.
Ist $p_0 \geqq 0$, so ist die Ruhelage asymptotisch stabil, falls

$$Q + p_0^2 > 0$$

und

$$\int_0^T (Q - Q(t))\, dt > L(p_0, Q)$$

gilt.

Bemerkung 1.5.5. Die angegebenen Bedingungen sind exakt im in Bemerkung 1.5.2 erläuterten Sinne.

2. Beschränktheitsuntersuchungen

Die direkten Methoden zum Nachweis beschränkter Lösungen von Differentialgleichungssystemen zweiter Ordnung lassen sich im wesentlichen in zwei Gruppen einteilen. Die Verfahren der ersten Gruppe sind mehr geometrischer Natur: man versucht, in einer Umgebung des unendlich fernen Punktes in der Phasenebene eine Schar ineinandergeschachtelter geschlossener doppelpunktfreier Wege (oder auch sich schließender Spiralbögen) so zu konstruieren, daß die Phasenbahnen jeden Weg von außen nach innen durchsetzen und daß somit der vom innersten Weg der Schar umschlossene Bereich für die Lösungen des Systems eine endgültige (und zugleich relative) Schranke bildet. (Zum Nachweis periodischer Lösungen in Systemen mit bezüglich t periodischen rechten Seiten beschränkt man sich häufig sogar darauf, einen einzigen derartigen Weg als relative Schranke (vgl. Folgerung 1.2.1) zu konstruieren.)

In die zweite Gruppe sind die Verfahren einzureihen, die auf geometrische Betrachtungen verzichten und endgültige Schranken mit Hilfe Ljapunovscher Funktionen und geeigneter Sätze (etwa Satz 1.4.3) ermitteln.

Eine strenge Trennung der beiden Gruppen ist nicht in allen Fällen möglich, da jede Schar ineinandergeschachtelter geschlossener Kurven als Schar der Niveaulinien $V(x, y) = C$ einer geeigneten (zeitunabhängigen) Ljapunovschen Funktion interpretiert werden kann (und umgekehrt). Beide Gruppen von Verfahren haben zahlreiche Resultate geliefert; von den Arbeiten der (historisch älteren) ersten Gruppe sei nur auf [8], [29], [37], [43], [52], [53], [54], [64], [65], von denen der zweiten Gruppe auf die Arbeiten von Yoshizawa (vgl. [62]) und Bhatia [3] hingewiesen (eine Verbindung geometrischer und analytischer Überlegungen benutzt Bibikov [4], [5]).

Die auf den Sätzen der Ljapunovschen Theorie basierenden Methoden haben den Vorteil, sich auf Differentialgleichungssysteme von höherer als zweiter Ordnung übertragen zu lassen — während geometrische Betrachtungen schon im dreidimensionalen Phasenraum oft erhebliche Schwierigkeiten bereiten dürften.

Ein weiterer Vorteil besteht in der Möglichkeit, die Ljapunovsche Funktion zeitabhängig zu wählen und sie so der Zeitabhängigkeit der rechten Seiten des Differentialgleichungssystems optimal anzupassen. Auf diese Weise gelingt es in gewissen Fällen, endgültige Schranken auch dann zu erhalten, wenn die Verfahren der ersten Gruppe nicht zum Ziel führen, weil das untersuchte System relative Schranken gar nicht besitzt. Die Herleitung derartiger Ergebnisse wird in diesem Kapitel am Beispiel der Liénardschen Gleichung mit zeitabhängigem Störglied,

$$x'' + f(x)\, x' + g(x) = e(t)\,, \tag{2.0.1}$$

demonstriert, einige für diese Gleichung früher [39] abgeleitete Sätze werden dabei verbessert.

2.1. Beschränktheitskriterien für die LIÈNARDsche Gleichung

Gleichung (2.0.1) sei in der Form

$$x' = y\,, \qquad y' = -\,g(x) - f(x)\,y + e(t) \tag{2.1.1}$$

als System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung geschrieben. Es werde vorausgesetzt, daß die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ im Intervall (x_1, x_2) mit

$$-\infty \leqq x_1 < 0\,, \qquad 0 < x_2 \leqq +\infty$$

stetig sind und daß das System im Bereich

$$A = \{x_1 < x < x_2,\ |y| < \infty\} \tag{2.1.2}$$

der Voraussetzung 1.1.1 genügt. Die folgenden Bezeichnungen werden benutzt:

$$G(x) = \int_0^x g(s)\,ds \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2)\,, \tag{2.1.3}$$

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,ds \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2)\,, \tag{2.1.4}$$

$$E(t) = \int_{t_0}^t e(s)\,ds \qquad (t \geqq t_0)\,. \tag{2.1.5}$$

Dann kann der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 2.1.1. Es gelte

$$\lim_{x \to x_1} G(x) = \lim_{x \to x_2} G(x) = \infty\,. \tag{2.1.6}$$

Existieren dann Funktionen $h(x)$, $p(t)$, $q(t)$ mit den folgenden Eigenschaften:
a) $h(x)$ für $x_1 < x < x_2$ definiert, stetig, stückweise stetig differenzierbar,

$$h(0) = 0\,, \tag{2.1.7}$$

$$h'(x) < f(x)\,, \tag{2.1.8}$$

$$\lim_{x \to x_i} h(x)\,\operatorname{sgn} x > 0\,; \tag{2.1.9}$$

b) $p(t)$ für $t \geqq t_0$ definiert, stetig differenzierbar,

$$|p(t)| \leqq p\,, \tag{2.1.10}$$

$$q(t) = e(t) - p'(t)\,, \tag{2.1.11}$$

$$|q(t)| \leqq q \tag{2.1.12}$$

derart, daß zwei Konstanten X_1, X_2 mit $x_1 < X_1 < 0 < X_2 < x_2$ sich so bestimmen lassen, daß für $x_1 < x < X_1$ und $X_2 < x < x_2$ die Ungleichungen

$$g(x)\,\operatorname{sgn} x > q\,, \tag{2.1.13}$$

$$h(x)\,\operatorname{sgn} x > p\,, \tag{2.1.14}$$

$$[g(x)\,\operatorname{sgn} x - q]\,[h(x)\,\operatorname{sgn} x - p] - \frac{[p[f(x) - h'(x)] + q]^2}{4\,[f(x) - h'(x)]} > 0 \tag{2.1.15}$$

erfüllt sind, dann sind die Lösungen des Systems (2.1.1) in Zukunft gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Es wird Satz 1.4.3 verwendet, die LJAPUNOVsche Funktion wird in der Gestalt

$$V(x, y, t) = G(x) + \frac{1}{2}\,[y + h(x) - p(t)]^2 + \int_0^x [f(s) - h'(s)]\,h(s)\,ds \tag{2.1.16}$$

gewählt.

Es ist

$$V(x, y, t) \geqq G(x) + \frac{1}{2}[y + h(x) - p(t)]^2 - C ,$$

wobei

$$C = - \inf_{x_1 < x < x_2} \int_0^x [f(s) - h'(s)]\, h(s)\, ds$$

nach (2.1.8), (2.1.9) sicher endlich ist. Mit (2.1.6) erfüllt V die Voraussetzungen (I)—(III) des Satzes 1.4.3.

Die mit (2.1.1) gebildete Ableitung hat die Form

$$\begin{aligned} V'(x, y, t) = & - \{[f(x) - h'(x)]\, y^2 - [p(t)\,[f(x) - h'(x)] + q(t)]\, y \\ & + [g(x) - q(t)]\,[h(x) - p(t)] . \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Es sei

$$\begin{aligned} L &= \inf_{X_1 \leqq x \leqq X_2} [f(x) - h'(x)] , \\ M &= \sup_{X_1 \leqq x \leqq X_2} [p\,[f(x) - h'(x)] + q] , \\ N &= \sup_{X_1 \leqq x \leqq X_2} [(|g(x)| + q)\,(|h(x)| + p] , \end{aligned}$$

dann gilt für $X_1 \leqq x \leqq X_2$

$$V'(x, y, t) \leqq - \{L\, y^2 - M|y| - N\} ,$$

also $V'(x, y, t) \leqq - W_1(y) < 0$ für $|y| > Y$,

$$Y = \frac{1}{2L}(M + \sqrt{M^2 + 4\, L\, N}) .$$

Für $x_1 < x < X_1$ und $X_2 < x < x_2$ ist unter den angegebenen Voraussetzungen

$$V'(x, y, t) \leqq - \{[f(x) - h'(x)]\, y^2 - [p\,[f(x) - h'(x)] + q]\, |y| + [|g(x)| - q]\,[|h(x)| - p] ,$$

dieser Ausdruck nimmt für

$$y = \frac{[p[f(x) - h'(x)] + q]}{2\,[f(x) - h'(x)]}$$

sein Supremum an, so daß also hier stets

$$V'(x, y, t) \leqq - \left\{[|g(x)| - q]\,[|h(x)| - p] - \frac{[p[f(x) - h'(x)] + q]}{4\,[f(x) - h'(x)]}\right\}$$

und damit nach Voraussetzung (2.1.15) $V'(x, y, t) \leqq - W_2(x) < 0$ gilt.

Somit ist im Bereich $A - \widetilde{A}$,

$$\widetilde{A} = \{X_1 \leqq x \leqq X_2 , \quad |y| \leqq Y\} ,$$

auch die Voraussetzung (IV) des Satzes 1.4.3 erfüllt.

Eine endgültige Schranke A,

$$A - \{X_1 \leqq x \leqq X_2 , \ |y| < Y\} ,$$

für die Lösungen des Systems (2.1.1) läßt sich zu A in der im Beweis zu Satz 1.4.3 angegebenen Weise berechnen.

2.2. Spezialfälle

Es lassen sich sehr verschiedenartige Voraussetzungen über die Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $e(t)$ in Gleichung (2.0.1) angeben, die es jeweils ermöglichen, Funktionen $h(x)$, $p(t)$, $q(t)$ entsprechend den Bedingungen des eben bewiesenen Satzes 2.1.1 zu wählen — und dementsprechend

erhält man eine Folge verschiedenartiger Kriterien für die zukünftige Beschränktheit der Lösungen von (2.0.1).

Betrachtet man zunächst den — in der Literatur schon ausführlich untersuchten — Fall, daß die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ in der gesamten Phasenebene stetig sind (also $x_1 = -\infty$, $x_2 = +\infty$), so zeigt es sich, daß nahezu alle hierfür bekannten Beschränktheitskriterien als Spezialfälle in Satz 2.1.1 enthalten sind.

Ist über die Funktion $e(t)$ nur bekannt, daß ihr Betrag beschränkt ist, so hat man in (2.1.16) $p(t) = 0$ zu wählen. Man kann dann den folgenden Satz aussprechen:

Satz 2.2.1. Die Lösungen des Systems (2.1.1) sind in Zukunft gleichmäßig beschränkt, falls

a) $|e(t)| \leqq m$ für $t \geqq t_0$,

b) $F(x) \operatorname{sgn} x > 0$ für $|x| \geqq X$ $(X > 0)$,

c) $g(x) \operatorname{sgn} x > m$ für $|x| > X$.

d) $F(x) > F(X) + m^2 \int_X^x \frac{ds}{(g(s) - m) F(s)}$ für $x > X \geqq X$,

$F(x) < F(-X) + m^2 \int_{-X}^x \frac{ds}{(g(s) + m) F(s)}$ für $x < -X \leqq -X$.

Beweis. Mit $p = 0$ liefert Satz 2.1.1 die Bedingungen

$$g(x) \operatorname{sgn} x > m, \tag{2.2.1}$$

$$h(x) \operatorname{sgn} x > 0, \tag{2.2.2}$$

$$[g(x) \operatorname{sgn} x - m]\, h(x) \operatorname{sgn} x - \frac{m^2}{4\,[f(x) - h'(x)]} > 0; \tag{2.2.3}$$

dabei ist (2.2.1) durch c) gesichert, (2.2.2) also eine Folge von (2.2.3). Man wählt nun

$$h'(x) = \begin{cases} f(x) - \frac{F(X)}{2X} & \text{für } 0 < x \leqq X, \\ f(x) - \frac{F(-X)}{2(-X)} & \text{für } -X \leqq x < 0, \\ f(x) - \frac{m^2}{2\,(g(x) - m)\,F(x)} & \text{für } x > X, \\ f(x) - \frac{m^2}{2\,(g(x) + m)\,F(x)} & \text{für } x < -X; \end{cases}$$

dann ist

$$h(\pm X) = \frac{1}{2} F(\pm X)$$

und

$$h(x) = \begin{cases} F(x) - \frac{1}{2} F(X) - \frac{m^2}{2} \int_X^x \frac{ds}{(g(s) - m) F(s)} & \text{für } x > X, \\ F(x) - \frac{1}{2} F(-X) - \frac{m^2}{2} \int_{-X}^x \frac{ds}{(g(s) + m) F(s)} & \text{für } x < -X. \end{cases}$$

Weiter ist in (2.2.3)

$$\frac{m^2}{4\,[f(x) - h'(x)]} = \frac{1}{2} [g(x) \operatorname{sgn} x - m] F(x) \operatorname{sgn} x;$$

(2.2.3) ist also für $|x| > X \geqq X$ genau dann erfüllt, wenn die Ungleichungen d) bestehen.

Folgerung 2.2.1. Die Lösungen des Systems (2.1.1) sind in Zukunft gleichmäßig beschränkt, falls

a) $|e(t)| \leqq m$ für $t \geqq t_0$,

b) $f(x) > 0$ für $|x| > X$,

c) $F(X) > 0$, $F(-X) < 0$,

d) $g(x) \operatorname{sgn} x > m + \dfrac{m^2}{f(x)\,|F(x)|}$ für $|x| > X$.

Beweis. Aus b), d) folgt

$$0 < \frac{m^2}{[g(x) \operatorname{sgn} x - m]\, F(x) \operatorname{sgn} x} < f(x) \qquad \text{für} \qquad |x| > X,$$

so daß für $|x| > X$ alle Bedingungen des Satzes 2.2.1 erfüllt sind.

Folgerung 2.2.2. Die Lösungen des Systems (2.1.1) sind in Zukunft gleichmäßig beschränkt, falls

a) $|e(t)| \leqq m$ für $t \geqq t_0$,

b) $\liminf\limits_{|x| \to \infty} g(x) \operatorname{sgn} x > m$,

c) $\liminf\limits_{|x| \to \infty} \dfrac{F(x) \operatorname{sgn} x}{\sqrt{|x|}} > K$, $\quad K > \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}\, m$,

$$0 < \varepsilon < \min\left\{ \liminf_{x \to +\infty} g(x) - m,\ \liminf_{x \to -\infty} (-g(x)) - m \right\}.$$

Beweis. Es sei $\vartheta^2 = \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}\,\dfrac{m}{K}$ (< 1). Wegen b), c) existiert ein $X_0 > 0$ derart, daß für $|x| > X_0$ die Ungleichungen

$$g(x) \operatorname{sgn} x > m + \varepsilon, \qquad F(x) \operatorname{sgn} x > \vartheta\, K \sqrt{|x|}$$

erfüllt sind. Dann folgt weiter für $x > X_0$

$$m^2 \int_{X_0}^{x} \frac{ds}{(g(s) - m)\, F(s)} < \frac{m^2}{\vartheta\, \varepsilon\, K} \int_{X_0}^{x} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{2\, m^2}{\vartheta\, \varepsilon\, K} (\sqrt{x} - \sqrt{X_0}) = \vartheta^3\, K\, (\sqrt{x} - \sqrt{X_0})$$
$$< F(x) - (\vartheta - \vartheta^3)\, K \sqrt{x} - \vartheta^3\, K \sqrt{X_0};$$

und für $x > X_2$,

$$X_2 = \left[\frac{F(X_0) - \vartheta^3\, K \sqrt{X_0}}{(\vartheta - \vartheta^3) K} \right]^2,$$

gilt sicher

$$F(x) > F(X_0) + m^2 \int_{-X_0}^{x} \frac{ds}{(g(s) - m)\, F(s)}.$$

Entsprechend läßt sich zeigen, daß für $x < X_1$,

$$X_1 = -\left[\frac{-F(-X_0) - \vartheta^3\, K \sqrt{-X_0}}{(\vartheta - \vartheta^3)\, K} \right]^2,$$

die Ungleichung

$$F(x) < F(-X_0) + m^2 \int_{X_0}^{x} \frac{ds}{(g(s) + m)\, F(s)}$$

besteht. Für $|x| > \overline{X}$,

$$\overline{X} = \max(-X_1,\ X_2),$$

sind also die Bedingungen des Satzes 2.2.1 erfüllt.

Bemerkung 2.2.1. Das letzte Ergebnis entspricht einem von Opial [45] durch Konstruktion geschlossener Wege bewiesenen Satz. Statt c) wird dort

$$\liminf_{|x|\to\infty} (F^2(x) - 2\,p\,|F(x)| - 4\,m\,|x|) > -\infty$$

mit einer Zahl $p \in (0, m/2]$ gefordert. Bhatia [3] beweist mit Hilfe einer Ljapunovschen Funktion einen ähnlichen Satz unter der schärferen Voraussetzung $f(x) \geqq \varepsilon > 0$ für $|x| > X$ anstelle von c).

Die Voraussetzungen über das Anwachsen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ für $|x| \to \infty$ können erheblich abgeschwächt werden, wenn die Störfunktion $e(t)$ ein beschränktes Integral besitzt. Man kann dann in Satz 2.1.1

$$p(t) = E(t) = \int_{t_0}^{t} e(s)\,ds \tag{2.2.4}$$

wählen und erhält

Satz 2.2.2. Die Lösungen des Systems (2.1.1) sind in Zukunft gleichmäßig beschränkt, falls

a) $|E(t)| \leqq M$ für $t \geqq t_0$,

b) $\liminf_{|x|\to\infty} F(x) \operatorname{sgn} x > M$,

c) $g(x) \operatorname{sgn} x > 0$ für $|x| > X_0$,

d) $\lim_{|x|\to\infty} G(x) = \infty$.

Beweis. Mit (2.2.4) reduzieren sich die Bedingungen (2.1.13)—(2.1.15) auf

$$g(x) \operatorname{sgn} x > 0\,, \tag{2.2.5}$$

$$h(x) \operatorname{sgn} x > M\,, \tag{2.2.6}$$

$$g(x) \operatorname{sgn} x\,[h(x) \operatorname{sgn} x - M] - \frac{M^2}{4}[f(x) - h'(x)] > 0\,. \tag{2.2.7}$$

Es sei

$$\delta = \min\{\liminf_{x\to+\infty} F(x) - M\,,\ \liminf_{x\to-\infty} (-F(x)) - M\}\,,$$

dann existiert ein $X \geqq X_0$ derart, daß für $|x| > X$ die Ungleichungen

$$F(x) \operatorname{sgn} x > M + \frac{\delta}{2}\,, \qquad g(x) \operatorname{sgn} x > 0$$

erfüllt sind. Wählt man nun

$$h'(x) = \begin{cases} f(x) - \dfrac{\delta}{4}\dfrac{1}{1+x^2} & \text{für } |x| \leqq X\,, \\ f(x) - \min\left\{\dfrac{\delta}{4}\dfrac{1}{1+x^2}, \dfrac{\delta}{2M^2}|g(x)|\right\} & \text{für } |x| > X\,, \end{cases}$$

so gilt einerseits

$$h(x) \operatorname{sgn} x > F(x) \operatorname{sgn} x - \frac{\delta}{4} \qquad \text{für alle } x,$$

also

$$h(x) \operatorname{sgn} x > M + \frac{\delta}{4} \qquad \text{für } |x| > X\,,$$

andererseits für $|x| > X$

$$f(x) - h'(x) < \frac{\delta}{2M^2}|g(x)|$$

und somit

$$g(x) \operatorname{sgn} x\,[h(x) \operatorname{sgn} x - M] - \frac{M^2}{4}[f(x) - h'(x)] \geqq \frac{\delta}{8}|g(x)|\,,$$

so daß die Bedingungen (2.2.5)—(2.2.7) für $|x| > X$ erfüllt sind.

Bemerkung 2.2.2. Der gleiche Satz wurde — unter Verwendung anderer Ljapunovscher Funktionen — bereits in [62] und (unter der schärferen Voraussetzung $g(x)\operatorname{sgn} x \geqq \varepsilon > 0$ für $|x| > X$) von Bhatia [3] bewiesen. Einen Beweis durch Konstruktion einer Schar geschlossener Kurven in der (x, z)-Ebene des zu (2.1.1) äquivalenten Systems

$$x' = -F(x) + z + E(t)\,, \qquad z' = -g(x)$$

gab De Castro (s. [62]). Mizohata und Yamaguti [37] bewiesen auf ähnlichem Wege die Beschränktheit aller Lösungen unter der schwächeren Voraussetzung $g(x)\operatorname{sgn} x \geqq 0$ für $|x| > X$ [statt c), d)]. Die Lösungen sind dann im allgemeinen nicht mehr in Zukunft beschränkt.

Eine andere Wahl der Funktionen $p(t)$, $q(t)$ ist beispielsweise dann von Interesse, wenn $e(t)$ die Summe zweier Funktionen ist, von deren einer bekannt ist, daß sie ein beschränktes Integral besitzt, während für die zweite nur Beschränktheit des Betrages vorausgesetzt werden kann:

Satz 2.2.3. Die Lösungen des Systems (2.1.1) sind in Zukunft gleichmäßig beschränkt, falls

a) $e(t) = e_1(t) + e_2(t)\,, \quad \int\limits_{t_0}^{t} e_1(s)\,ds = E_1(t)\,, \; |E_1(t) \leqq M$ für $t \geqq t_0\,, \; |e_2(t)| \leqq m$ für $t \geqq t_0\,,$

b) $\liminf\limits_{|x|\to\infty} g(x)\operatorname{sgn} x > m\,,$

c) $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{F(x)\operatorname{sgn} x}{\sqrt{|x|}} = \infty\,.$

Beweis. Man wählt

$$p(t) = E_1(t)\,, \qquad q(t) = e_2(t)\,,$$

dann ist $p = M$, $q = m$. Es sei

$$\delta = \min\{\liminf_{x\to+\infty} g(x) - m\,, \quad \liminf_{x\to-\infty}(-g(x)) - m\}\,,$$

dann existiert ein $X_1 > 0$ derart, daß für $|x| > X_1$ die Ungleichungen

$$g(x)\operatorname{sgn} x > m + \frac{\delta}{2}\,, \qquad F(x)\operatorname{sgn} x > \sqrt{|x|}$$

erfüllt sind. Nun setzt man

$$h'(x) = \begin{cases} f(x) - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) & \text{für} \quad |x| \leqq X_1\,, \\ f(x) - \dfrac{2\,m^2}{\delta\,|F(x)|} & \text{für} \quad |x| > X_1\,, \end{cases}$$

dann gibt es eine Zahl $X_2 \geqq X_1$ derart, daß für $|x| > X_2$

$$[M[f(x) - h'(x)] + m]^2 < 2\,m^2\,,$$

also

$$\frac{[M[f(x) - h'(x)] + m]^2}{4\,[f(x) - h'(x)]} < \frac{\delta}{4}\,|F(x)|$$

ist. Weiter ist für $x > X_1$

$$h(x) - h(X_1) = F(x) - F(X_1) - \frac{2\,m^2}{\delta}\int\limits_{X_1}^{x} \frac{ds}{F(s)}\,,$$

für das Integral gilt

$$\int\limits_{X_1}^{x} \frac{ds}{F(s)} < \int\limits_{X_1}^{x} \frac{ds}{\sqrt{s}} = 2\,(\sqrt{x} - \sqrt{X_1})\,,$$

man erhält also

$$h(x) > F(x) - \frac{4\,m^2}{\delta}\sqrt{x} - \left[F(X_1) - \frac{4\,m^2}{\delta}\sqrt{X_1} - h(X_1)\right]$$

für $x > X_1$ und entsprechend

$$h(x) < F(x) + \frac{4\,m^2}{\delta}\sqrt{-x} - \left[F(-X_1) + \frac{4\,m^2}{\delta}\sqrt{-X_1} - h(-X_1)\right]$$

für $x < -X_1$. Damit wird aber in (2.1.15)

$$[g(x)\operatorname{sgn} x - m]\,[h(x)\operatorname{sgn} x - M] - \frac{[M[f(x) - h'(x)] + m]^2}{4\,[f(x) - h'(x)]}$$

$$> \frac{\delta}{4}F(x)\operatorname{sgn} x - 2\,m^2\sqrt{|x|} + O(1) \text{ für } |x| \to \infty\,,$$

so daß wegen c) sicher ein $X \geqq X_2$ derart existiert, daß für $|x| > X$ die Bedingungen (2.1.13)—(2.1.15) erfüllt sind.

Eine geeignete Aufspaltung der Funktion $e(t)$ ist weiter dann bedeutungsvoll, wenn man Differentialgleichungen betrachtet, bei denen die Funktion $g(x)$ in einem endlichen Punkt $x = x_0$ eine Unendlichkeitsstelle besitzt. Derartige Differentialgleichungen wurden von Forbat und Huaux ([17], [18], [15]) untersucht.

Es sei hier $x_0 > 0$, also gemäß (2.1.2)

$$A - \{-\infty < x < x_0\,,\quad |y| < \infty\}\,.$$

Dann gilt der folgende Satz:

Satz 2.2.4. Die Lösungen des Systems (2.1.1) sind in Zukunft gleichmäßig beschränkt, falls

a) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty \qquad (x_0 > 0)\,,$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} G(x) = \infty\,,$

c) $F(x_0) > 0\,,$

d) $e(t) = e_1(t) + e_2(t)\,,$

$$\int_{t_0}^{t} e_1(s)\,ds = E_1(t)\,, \qquad |E_1(t)| \leqq M < F(x_0) \qquad (t \geqq t_0)\,,$$

$$|e_2(t)| \leqq m \qquad (t \geqq t_0)\,,$$

e) $\limsup\limits_{x \to -\infty} g(x) < -m$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{F(x)}{\sqrt{-x}} = -\infty\,.$

Beweis: Man setzt wieder

$$p(t) = E_1(t)\,, \qquad q(t) = e_2(t)\,,$$

so daß $p = M$, $q = m$ ist. Die Voraussetzungen über $f(x)$, $g(x)$ für $x \to -\infty$ sind mit den in Satz 2.2.3 getroffenen identisch; man kann also $h(x)$ für $x < 0$ in gleicher Weise wählen und ist dann sicher, daß ein $X_1 < 0$ so existiert, daß für $x < X_1$ die Bedingungen (2.1.13) bis (2.1.15) erfüllt sind.

Weiter sei

$$\delta = F(x_0) - M;$$

da $F(x)$ stetig ist, gibt es ein X' $(0 < X' < x_0)$ derart, daß

$$F(x) > M + \frac{\delta}{2} \qquad \text{für} \qquad X' \leqq x \leqq x_0$$

ist. Man wählt nun

$$h'(x) = f(x) - \frac{\delta}{4\,X'} \qquad \text{für} \qquad 0 < x \leqq x_0\,,$$

dann gilt

$$h(x) > M + \frac{\delta}{4} \qquad \text{für} \qquad X' \leqq x \leqq x_0 ,$$

und wegen a) existiert sicher ein X_2 ($X' \leqq X_2 < x_0$) so, daß die Bedingungen (2.1.13)–(2.1.15) auch für $X_2 \leqq x \leqq x_0$ erfüllt sind.

Beispiel 2.2.1. Die Lösungen der Boitteschen Differentialgleichung [18]

$$x'' + c\,x' + k^2 \frac{x}{1-x} = a \cos \omega t \quad (x < 1;\ c, k, a,\ \omega > 0) \tag{2.2.8}$$

sind in Zukunft gleichmäßig beschränkt, wenn die Koeffizienten der Gleichung den Bedingungen

$$a < k^2 \qquad \text{oder} \qquad a \geqq k^2, \quad \sqrt{a^2 - k^4} - k^2 \arccos \frac{k^2}{a} < c\,\omega \tag{2.2.9}$$

genügen.

Beweis. Man betrachtet statt (2.2.8) das System

$$x' = y\ ,\ y' = -k^2 \frac{x}{1-x} - c\,y + a \cos \omega t \tag{2.2.10}$$

und spaltet (vgl. [39]) die Funktion $e(t) = a \cos \omega t$ auf in $e_1(t) + e_2(t)$ mit

$$e_2(t) = \min \{ |a \cos \omega t|, m \} \operatorname{sgn} (\cos \omega t) \qquad (m \leqq a);$$

dann ist $|e_2(t)| \leqq m$, und für

$$E_1(t) = \int_0^t \max \{ |a \cos \omega s| - m, 0 \} \operatorname{sgn} (\cos \omega s)\, ds$$

gilt aus Periodizitätsgründen

$$|E_1(t)| \leqq M = \int_0^{t_0} (a \cos \omega s - m) ds \quad \text{mit} \quad t_0 = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{m}{a} \leqq \frac{\pi}{2} ;$$

die Auswertung des Integrals liefert

$$M = \frac{1}{\omega} \left[\sqrt{a^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{a} \right].$$

Im Falle $a < k^2$ wählt man $m = a$, dann ist $E_1(t) \equiv 0$, $M = 0$; im Falle $a \geqq k^2$ setzt man $m = k^2 - \delta$ und wählt $\delta > 0$ so klein, daß $M < c$ ausfällt [dies ist unter der Voraussetzung

$$\sqrt{a^2 - k^4} - k^2 \arccos \frac{k^2}{a} < c\,\omega$$

wegen der Stetigkeit der eingehenden Funktionen immer möglich].

Mit den Bezeichnungen von Satz 2.2.4 ist hier

$$x_0 = 1, \quad F(x) = c\,x, \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) = -k^2 ,$$

das System (2.2.10) erfüllt also in beiden Fällen alle angeführten Bedingungen.

Bemerkung 2.2.3. Relative Schranken für die Lösungen der Gleichung (2.2.8) und auch für allgemeinere Gleichungen (2.0.1), bei denen die Funktion $g(x)$ eine Polstelle aufweist, wurden (zum Zwecke des Nachweises periodischer Lösungen) bereits in [17], [18] konstruiert. Die angegebenen Konstruktionen sind jedoch (vgl. [39]) unter den angeführten Voraussetzungen nicht immer ausführbar.

Bemerkung 2.2.4. Die Lösungen der Gleichung (2.2.8) besitzen (vgl. [39]) für $a > k^2$ in der (x, y)-Phasenebene keine relative Schranke, d. h., es existiert keine geschlossene doppelpunktfreie Kurve, die von den Lösungen des Systems (2.2.10) stets von außen nach innen durchsetzt wird. Aus (2.2.10) folgt nämlich

$$\frac{dy}{dx} \leqq -k^2 \frac{x}{(1-x)\,y} - c + \frac{a}{|y|} ,$$

jede derartige Kurve müßte also der Differentialungleichung

$$\frac{dx}{dy} > -k^2 \frac{x}{(1-x)\,y} - c + \frac{a}{|y|} \tag{2.2.11}$$

genügen. Hier gilt aber für $a > k^2$

$$\lim_{y \to 0} \frac{dy}{dx} = -\infty \qquad \text{für alle } x \leqq 1 ,$$

die x-Achse wird also von den Lösungskurven von (2.2.11) nie von unten nach oben durchsetzt.

Bemerkung 2.2.5. Ganz allgemein werden Differentialgleichungen

$$x'' + f(x)\,x' + g(x) = e(t) , \tag{2.0.1}$$

deren Lösungen nach den Sätzen 2.2.2.—2.2.4 in Zukunft gleichmäßig beschränkt sind und für die also in der (x, x')-Phasenebene endgültige Schranken existieren, dort nicht immer auch relative Schranken besitzen. Man hat, um auch für sie den Beschränktheitsnachweis durch Konstruktion einer Schar geschlossener Wege führen zu können, statt (2.1.1) ein anderes zu (2.0.1) äquivalentes System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung zu wählen. Setzt man etwa

$$z = x' - p(t) ,$$

so erhält man das System

$$x' = z + p(t) , \qquad z' = -g(x) - f(x)\,[z + p(t)] + q(t) , \tag{2.2.12}$$

für dessen Lösungen in der (x, z)-Ebene beispielsweise die Niveaulinien $\tilde{V}(x, z) = C$ der (hier zeitunabhängigen) LJAPUNOVschen Funktion (2.1.16),

$$\tilde{V}(x, z) = V(x, z + p(t), t) = G(x) + \frac{1}{2}\,[z + h(x)]^2 + \int_0^x [f(s) - h'(s)]\,h(s)\,ds$$

im Gebiet $\tilde{V}'(x, z, t) \leqq 0$ eine Schar relativer Schranken liefern.

Abschließend sei noch ein Satz (vgl. [18]) über die Beschränktheit der Lösungen von Systemen angeführt, bei denen die Funktion $g(x)$ zwei Unendlichkeitsstellen in endlichen Punkten $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ besitzt, so daß

$$A = \{x_1 < x < x_2 , \quad |y| < \infty\}$$

wird.

Satz 2.2.5. Die Lösungen des Systems (2.1.1) sind in Zukunft gleichmäßig beschränkt, falls

a) $\lim_{x \to x_1} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \to x_2} g(x) = +\infty$ $\qquad (x_1 < 0,\ x_2 > 0)$,

b) $\lim_{x \to x_1} G(x) = \lim_{x \to x_2} G(x) = +\infty$,

c) $F(x_1) < 0$, $F(x_2) > 0$,

d) $|e(t)| \leqq m$ für $t \geqq t_0$ $\quad (m > 0,$ beliebig).

Beweis. Man setzt $p(t) = 0$, also $q(t) = e(t)$, und

$$h'(x) = f(x) - \frac{1}{2} \min\left\{\frac{F(x_1)}{x_1}, \frac{F(x_2)}{x_2}\right\}.$$

Dann ist $h(x_1) < 0$, $h(x_2) > 0$, und es lassen sich Zahlen $X_1 < 0$, $X_2 > 0$ derart finden, daß für $x_1 < x < X_1$ und $X_2 < x < x_2$ die Bedingungen (2.1.13)—(2.1.15) erfüllt sind.

3. Stabilitätsuntersuchungen

Interessiert man sich für das Stabilitätsverhalten einer (beliebigen, als beschränkt vorauszusetzenden) Lösung

$$P^0(t) \sim (x^0(t), y^0(t))$$

des Systems (1.1.1), so hat man sie mit benachbarten Lösungen zu vergleichen, also — wie in Abschnitt 1.3 dargestellt — entweder die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung (1.3.1) oder die linearisierten Variationsgleichungen (1.3.6) bzw. (1.3.7) zu untersuchen. In allen Fällen stößt man auf die gleiche prinzipielle Schwierigkeit: daß nämlich die Lösung $P^0(t)$ und damit auch die davon abhängenden rechten Seiten der zu betrachtenden Differentialgleichungssysteme gar nicht exakt bekannt sind. Im allgemeinen stehen nur gewisse Schranken für die Koordinaten $x^0(t)$, $y^0(t)$ zu Verfügung.

Tatsächlich ist aber die Existenz solcher Schranken häufig ausreichend, um exakte Aussagen über das Stabilitätsverhalten der Lösung zu geben. Man verwendet hierzu im wesentlichen zwei Methoden (die etwa den zum Beschränktheitsnachweis angewandten entsprechen): einmal kann man durch Betrachtung der Phasenbahnen oft Vergleichssysteme angeben, deren Stabilitätsverhalten bekannt oder leichter zu beurteilen ist und deren Stabilität die der interessierenden Lösung des ursprünglich betrachteten Systems zur Folge hat (vgl. [32], [46], [52], [60]), zum anderen ist es häufig möglich, Ljapunovsche Funktionen so zu konstruieren, daß ihre charakteristischen Eigenschaften gleichmäßig für alle möglichen innerhalb der bekannten Schranken verlaufenden Lösungen bestehen; auf diese Weise erhält man dann meist sogar Aussagen über asymptotische Stabilität im Großen (vgl. [1], [3], [42], [44], [57], [61], [63]).

Die Möglichkeiten, die die Verbindung beider Methoden bietet, sollen hier am Beispiel der allgemeinen expliziten Differentialgleichung zweiter Ordnung,

$$x'' + F(x, x', t) = 0 \,, \tag{3.0.1}$$

gezeigt werden.

3.1. Stabilitätskriterien für die Differentialgleichung $x'' + F(x, x', t) = 0$

Die Gleichung (3.0.1) sei als System geschrieben:

$$x' = y \,, \qquad y' = -F(x, y, t) \,, \tag{3.1.1}$$

die Lösungen dieses Systems seien in Zukunft beschränkt mit der endgültigen Schranke

$$A = \{ |x| \leqq \bar{X} \,, \quad |y| \leqq \bar{Y} \} \,. \tag{3.1.2}$$

Für die weitere Rechnung erweist es sich als sinnvoll, einen eventuell in $F(x, y, t)$ enthaltenen Term $f(x)\, y$ abzuspalten; (3.1.1) erhält damit die Gestalt

$$x' = y \,, \qquad y' = -f(x)\, y - G(x, y, t) \,. \tag{3.1.3}$$

Für dieses System gilt der folgende Vergleichssatz:

Satz 3.1.1. Für $(x, y) \in A$, $t \geqq t_0$ sei

$$f(x) \geqq c_1 \,, \tag{3.1.4}$$

$$\frac{G(x, y_1, t) - G(x, y_2, t)}{y_1 - y_2} \geqq c_2 \,, \tag{3.1.5}$$

$$\frac{G(x_1, y, t) - G(x_2, y, t)}{x_1 - x_2} > 0 ; \tag{3.1.6}$$

ist dann die Ruhelage der Differentialgleichung

$$u'' + c\,u' + [G(x(t) + u, y(t), t) - G(x(t), y(t), t)] = 0 \tag{3.1.7}$$

mit

$$c = c_1 + c_2$$

für jede Lösung $(x(t), y(t)) \in A$ asymptotisch stabil, so ist jede Lösung des Systems (3.1.3) asymptotisch stabil, d. h., System (3.1.3) ist äußerst stabil.

Beweis. Mit der Bezeichnung (2.1.4) setzen wir

$$y = z - F(x) \tag{3.1.8}$$

und transformieren damit System (3.1.3) in ein System

$$x' = -F(x) + z \,, \qquad z' = -G(x, y, t) \tag{3.1.9}$$

in der (x,z)-Ebene. (Hier und im folgenden wird zur Abkürzung der Schreibweise weiter y [für $z - F(x)$] als zweites Argument der Funktion G geschrieben.) In der (x, z)-Ebene besitzen die Lösungen nach (3.1.2) als endgültige Schranke beispielsweise den Bereich

$$\widetilde{A} = \{\, |x| \leqq \bar{X} \,, \quad -\bar{Y} + F(-\bar{X}) \leqq z \leqq \bar{Y} + F(\bar{X}) \} \,.$$

Bezüglich ihres Stabilitätsverhaltens sind die beiden Systeme äquivalent.

Nun werden zwei Lösungen $(x(t), z(t))$ und $(x(t) + u(t), z(t) + w(t))$ betrachtet, die für $t \geqq t_0$ in A verlaufen. Die Störungsgleichungen für (3.1.9) haben die Form

$$\left.\begin{aligned} u' &= -[F(x(t) + u) - F(x(t))] + w \,, \\ w' &= -[G(x(t) + u, y(t) + v, t) - G(x(t), y(t), t)] \,, \end{aligned}\right\} \tag{3.1.10}$$

wo v eine Abkürzung für

$$v = -[F(x(t) + u) - F(x(t))] + w \tag{3.1.11}$$

ist. — Für $x(t)$, $y(t)$ werde im folgenden einfach x, y geschrieben. Mit (3.1.11) läßt sich (3.1.10) dann schreiben als

$$u' = v \,, \quad w' = -\frac{G(x + u, y + v, t) - G(x + u, y, t)}{v}\, v - [G(x + u, y, t) - G(x, y, t)] \tag{3.1.12}$$

— und die Ruhelage dieses Systems ist stabil, falls die Ruhelage des Systems

$$u' = v \,, \quad w' = -c_2\, v - [G\,(x + u, y, t) - G(x, y, t)] \tag{3.1.13}$$

stabil ist, denn wegen

$$\left|\frac{dw}{du}\right| (3.1.12) \leqq \left|\frac{dw}{du}\right| (3.1.13) \tag{3.1.14}$$

durchsetzen die Phasenbahnen des Systems (3.1.13) die des Systems (3.1.12) nie von innen nach außen.

Durch die Transformation

$$\bar{w} = w + c_2\, u \tag{3.1.15}$$

erhält man aus (3.1.13) weiter

$$u' = v \,, \quad w' = -[G(x + u, y, t) - G(x, y, t)]$$

— oder ausführlich geschrieben

$$\left.\begin{aligned} u' &= -[F(x+u) - F(x)] - c_2 u + \bar{w}\,, \\ \bar{w}' &= -[G(x+u, y, t) - G(x, y, t)] \end{aligned}\right\} \tag{3.1.16}$$

— und hier ist die Ruhelage stabil, wenn die Ruhelage des Systems (3.1.17),

$$\left.\begin{aligned} u' &= -(c_1 + c_2)\, u + \bar{w}\,, \\ \bar{w}' &= -[G(x+u, y, t) - G(x, y, t)] \end{aligned}\right\} \tag{3.1.17}$$

stabil ist, denn es gilt stets

$$\left|\frac{du}{d\bar{w}}\right| (3.1.16) \geqq \left|\frac{du}{d\bar{w}}\right| (3.1.17).$$

Das System (3.1.17) aber ist der Gleichung (3.1.7) äquivalent.

Folgerung 3.1.1. Das System (3.1.3) ist äußerst stabil, wenn für $(x, y) \in A$, $t \geqq t_0$ die Bedingungen

a) $f(x) \geqq c_1$,

b) $\dfrac{G(x, y_1, t) - G(x, y_2, t)}{y_1 - y_2} \geqq c_2 \qquad (c_1 + c_2 > 0)$,

c) $k^2 \leqq \dfrac{G(x_1, y, t) - G(x_2, y, t)}{x_1 - x_2} \leqq h^2$

erfüllt sind [besitzt G stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, so kann man b), c) durch

b′) $G_y(x, y, t) \geqq c_2$,

c′) $k^2 \leqq G_x(x, y, t) \leqq h^2$

ersetzen] und (mit den Bezeichnungen von Satz 1.5.2) die Ungleichung

$$\Psi(c_1 + c_2, k^2, h^2) < 1$$

gilt.

[Hinreichend hierfür ist beispielsweise (vgl. Bemerkung 1.5.4)

$$c_1 + c_2 \geqq \frac{2}{\pi}(h - k)\,.\,]$$

Setzt man die Funktionen $f(x)$, $G(x, y, t)$ als nach allen Argumenten stetig differenzierbar voraus und nimmt weiter an, daß die Lösungen des Systems (3.1.3) in der (x, y)-Ebene eine relative Schranke $B \subseteq A$ besitzen, so kann man mit Hilfe der linearisierten Variationsgleichungen (1.3.7) und des Satzes 1.3.3 eine Reihe ähnlicher Vergleichssätze angeben.

Satz 3.1.2. Für $(x, y) \in B$, $t \geqq t_0$ gelte

$$f(x) \geqq c_1 \geqq 0\,, \qquad G_y(x, y, t) \geqq c_2\,, \quad G_x(x, y, t) > 0;$$

ist dann die Ruhelage der Differentialgleichung

$$u'' + c\,u' + G_x(x(t), y(t), t)\, u = 0 \tag{3.1.18}$$

mit $c = c_1 + c_2$ für jede Lösung $(x(t), y(t)) \in B$ asymptotisch stabil[2]), so ist das System (3.1.3) äußerst stabil.

Beweis. Man betrachtet wieder System (3.1.9) und dazu gemäß Satz 1.3.3 die Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} u' &= -f(x(t))\, u + w\,, \\ w' &= -[G_x(x(t), y(t), t) - f(x(t))\, G_y(x(t), y(t), t)]\, u - G_y(x(t), y(t), t)\, w \end{aligned} \tag{3.1.10′}$$

[2]) Die asymptotische Stabilität ist dann gleichmäßig im in Satz 1.3.3 geforderten Sinne, da B (vgl. Definition 1.2.6) ein abgeschlossener Bereich ist.

(man hat

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, -F(x) + z, t) = G_x(x, y, t) - f(x)\, G_y(x, y, t) \Big|_{y = -F(x) + z}$$

zu beachten), man erhält statt (3.1.11)

$$v = -f(x(t))\, u + w \qquad (3.1.11')$$

und weiter mit x, y statt $x(t), y(t)$

$$u' = v\,, \qquad w' = -G_x(x, y, t)\, u - G_y(x, y, t)\, v; \qquad (3.1.12')$$

$$u' = v\,, \qquad w' = -G_x(x, y, t)\, u - c_2\, v\,, \qquad (3.1.13')$$

weiter mit (3.1.15)

$$u' = -f(x)\, u - c_2\, u + \bar{w}\,, \qquad \bar{w}' = -G_x(x, y, t)\, u \qquad (3.1.16')$$

und schließlich das zu (3.1.18) äquivalente System

$$u' = -(c_1 + c_2)\, u + \bar{w}\,, \qquad \bar{w}' = -G_x(x, y, t)\, u\,. \qquad (3.1.17')$$

Gelegentlich wird auch eine weniger weitgehende Linearisierung von Interesse sein. Hierzu seien noch die beiden folgenden Sätze angegeben.

Satz 3.1.3. Für $(x, y) \in B$, $t \geqq t_0$ gelte

$$G_y(x, y, t) \geqq c;$$

ist dann die Ruhelage des Systems

$$u' = -[f(x(t)) + c]\, u + v\,, \qquad v' = -G_x(x(t), y(t), t)\, u \qquad (3.1.19)$$

für jede Lösung $(x(t), y(t)) \in B$ asymptotisch stabil, so ist das System (3.1.3) äußerst stabil. (Beweis: Das System (3.1.19) ist mit (3.1.16′) identisch.)

Satz 3.1.4. Es sei $f(x) \equiv 0$; hinreichend für äußerste Stabilität des Systems (3.1.3) ist dann die asymptotische Stabilität der Ruhelage der Gleichung

$$u'' + G_y(x(t), y(t), t)\, u' + G_x(x(t), y(t), t) = 0 \qquad (3.1.20)$$

für alle Lösungen $(x(t), y(t)) \in B$. (Dies ist eine unmittelbare Konsequenz des Satzes 1.3.3.)

Wendet man auf (3.1.20) Satz 1.5.1 an, so erhält man

Folgerung 3.1.2. Das System (3.1.3) mit $f(x) \equiv 0$ ist äußerst stabil, wenn für $(x, y) \in B$, $t \geqq t_0$ die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} G_x(x, y, t) &> 0\,, \\ 2\, G_y(x, y, t)\, G_x(x, y, t) - [G_x(x, y, t)]' &> 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.21)$$

erfüllt sind. Dabei ist die zeitliche Ableitung von G_x mit (3.1.3) zu bilden:

$$[G_x(x, y, t)]' = G_{xx}(x, y, t)\, y - G_{xy}(x, y, t)\, G(x, y, t) + G_{xt}(x, y, t)\,.$$

3.2. Konstruktion LJAPUNOVscher Funktionen

Die angeführten Vergleichssätze sind von Bedeutung, wenn man daran interessiert ist, Bedingungen für die äußerste Stabilität des Systems (3.1.3) so anzugeben, daß durch sie die Nichtlinearitäten möglichst wenig eingeschränkt werden: LJAPUNOVsche Funktionen existieren für die einfacheren Vergleichssysteme oft unter weniger starken Voraussetzungen als für die relativ komplizierten Störungs- bzw. Variationsgleichungen (3.1.10), (3.1.10′).

Als Beispiel sei hier die Konstruktion einer LJAPUNOVschen Funktion einfachster Gestalt — nämlich einer quadratischen Form mit konstanten Koeffizienten — für das System (3.1.10′) betrachtet.

Wir führen die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= G_x(x(t), y(t), t)\,, \\ r(t) &= G_y(x(t), y(t), t)\,, \\ s(t) &= f(x(t)) \end{aligned}\right\} \tag{3.2.1}$$

ein und setzen die Schranken

$$\left.\begin{aligned} &0 < q_1 < q(t) < q_2\,, \\ &0 < r_1 \leqq r(t) \leqq r_2\,, \qquad (t \geqq t_0) \\ &0 < s_1 \leqq s(t) \leqq s_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.2.2}$$

als gegeben voraus.

Da man ein Glied der Form $c\,x'$ bei der Aufspaltung von $F(x, x', t)$ in Gleichung (3.0.1) sowohl dem ersten als auch dem zweiten Term zuordnen kann, sind die Schranken r_i, s_i nicht eindeutig festgelegt. Aus dem Charakter der Nichtlinearitäten folgt zwar

$$r_2 - r_1 = \Delta r\,, \qquad s_2 - s_1 = \Delta s \tag{3.2.3}$$

mit festen Konstanten Δr, Δs; darüber hinaus jedoch fixieren wir zunächst nur zwei Konstanten p_1, p_2 so, daß

$$r_1 + s_1 = p_1\,, \qquad r_2 + s_2 = p_2 \tag{3.2.4}$$

gilt, und bewahren so dem System noch eine gewisse Anpassungsfähigkeit, die es uns gestattet, die Ljapunovsche Funktion als Summe zweier Quadrate,

$$V(u, w) = C\,u^2 + w^2 \qquad (C > 0)\,, \tag{3.2.5}$$

zu wählen. Das System der linearisierten Variationsgleichungen (3.1.10′) schreibt sich mit (3.2.1) in der Form

$$\left.\begin{aligned} u' &= -\,s(t)\,u + w\,, \\ w' &= -\,[q(t) - r(t)\,s(t)]\,u - r(t)\,w \end{aligned}\right\} \tag{3.2.6}$$

und liefert als Ableitung für (3.2.5)

$$V'(u, w, t) = -\,2\,\{C\,s(t)\,u^2 + r(t)\,w^2 + [q(t) - r(t)\,s(t) - C]\,u\,w\}\,.$$

V' ist für $u^2 + w^2 > 0$ negativ, sofern die Diskriminante

$$D(t) = 4\,C\,r(t)\,s(t) - [q(t) - r(t)\,s(t) - C]^2 \tag{3.2.7}$$

für alle t positiv ist, dies ist der Fall, wenn

$$2\sqrt{C\,r(t)\,s(t)} > |q(t) - r(t)\,s(t) - C|$$

oder

$$|\sqrt{C} - \sqrt{r(t)\,s(t)}| < \sqrt{q(t)} < \sqrt{C} + \sqrt{r(t)\,s(t)}$$

gilt, und diese letzten Ungleichungen sind erfüllt, wenn man

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{q_1} &= \sup_t\,[\sqrt{C} - \sqrt{r(t)\,s(t)}]\,, \\ \sqrt{q_2} &= \inf_t\,[\sqrt{C} + \sqrt{r(t)\,s(t)}] \end{aligned}\right\} \tag{3.2.8}$$

setzt. Die Relationen (3.2.8) gestatten nun, etwa für $q(t)$ zu vorgegebener unterer Schranke q_1 und vorgegebenen Konstanten p_1, p_2, r, s die obere Schranke q_2 so zu bestimmen, daß die Bedingungen (3.2.2) die asymptotische Stabilität der Ruhelage von (3.2.6) sichern. Dazu werden die Konstanten r_i, s_i, C so gewählt, daß q_2 den größtmöglichen Wert annimmt.

Es gilt

$$\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r_1 s_1}+\sqrt{r_2 s_2}\right)-\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r_2 s_2}-\sqrt{r_1 s_1}\right)\leqq\sqrt{r(t)\,s(t)}\leqq\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r_1 s_1}+\sqrt{r_2 s_2}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r_2 s_2}-\sqrt{r_1 s_1}\right),$$

es sei daher

$$\sqrt{C}\geqq\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r_1 s_1}+\sqrt{r_2 s_2}\right)$$

vorausgesetzt. Dann folgt aus (3.2.2) und (3.2.8)

$$\sqrt{q_1}=\sqrt{C}-\sqrt{r_1 s_1}\,,\qquad \sqrt{q_2}=\sqrt{C}+\sqrt{r_1 s_1}\,,$$

also

$$\sqrt{q_2}=\sqrt{q_1}+2\sqrt{r_1 s_1}\,. \tag{3.2.10}$$

Die Differenz $\sqrt{q_2}-\sqrt{q_1}$ ist unter der Nebenbedingung (3.2.4) am größten, wenn

$$r_1=s_1=\tfrac{1}{2}p_1 \tag{3.2.11}$$

ist. Man hat die folgenden Fälle zu unterscheiden:

I. Ist

$$\sqrt{q_1}\geqq\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}p_1+\Delta r\right)\left(\tfrac{1}{2}p_1+\Delta s\right)}-\tfrac{1}{2}p_1\right], \tag{3.2.12}$$

so wählt man $r_1=s_1=\frac{1}{2}p_1$ und

$$\sqrt{C}=\sqrt{q_1}+\tfrac{1}{2}p_1$$

und erhält

$$\sqrt{q_2}=\sqrt{q_1}+p_1\,. \tag{3.2.13}$$

II. Es sei

$$\sqrt{q_1^*}=\min\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta r\,(p_1+\Delta s)}\,,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{(p_1+\Delta r)\,\Delta s}\right\}; \tag{3.2.14}$$

gilt dann

$$\sqrt{q_1^*}<\sqrt{q_1}<\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}p_1+r\right)\left(\tfrac{1}{2}p_1+s\right)}-\tfrac{1}{2}p_1\right], \tag{3.2.15}$$

so bestimmt man r_1 als Lösung der Gleichung

$$\sqrt{q_1}=\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(r_1+\Delta r)\,(p_1-r_1+\Delta s)}-\sqrt{r_1\,(p_1-r_1)}\right], \tag{3.2.16}$$

setzt

$$s_1=p_1-r_1\,,\qquad \sqrt{C}=\sqrt{q_1}+\sqrt{r_1 s_1}$$

und erhält

$$\sqrt{q_2}=\sqrt{q_1}+2\sqrt{r_1 s_1}\,. \tag{3.2.17}$$

III. Für $q_1<q_1^*$ besitzen die Relationen (3.2.8) keine Lösung; die Stabilität des Systems läßt sich in diesem Falle mit Hilfe einer quadratischen Form mit konstanten Koeffizienten als LJAPUNOV-Funktion offenbar nicht nachweisen.

Bemerkung 3.2.1. Die Voraussetzung (3.2.9) ist nicht notwendig. Wählt man

$$\sqrt{C}<\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r_1 s_1}+\sqrt{r_2 s_2}\right),$$

so folgt aus (3.2.8)

$$\sqrt{q_1}=\sqrt{r_2 s_2}-\sqrt{C}\,,\qquad \sqrt{q_2}=\sqrt{r_1 s_1}+\sqrt{C}\,,$$

wegen $q_1\leqq q_2$ muß

$$\sqrt{C}\geqq\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r_2 s_2}-\sqrt{r_1 s_1}\right)$$

gelten. Die Differenz

$$\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1} = \sqrt{r_1 s_1} - \sqrt{r_2 s_2} + 2\sqrt{C} \tag{3.2.18}$$

ist hier jedoch stets kleiner als der durch (3.2.17) gegebene Wert.

Die Ergebnisse werden besser, wenn man mit Hilfe der in 3.1 abgeleiteten Vergleichssätze die Entscheidung über das Stabilitätsverhalten auf die Untersuchung von Systemen zurückführt, in denen eine oder mehrere nichtlineare Funktionen durch lineare ersetzt sind. Es sei etwa zunächst (gemäß Satz 3.1.3) G_y durch eine Konstante ersetzt, also

$$\Delta r = 0 .$$

Dann ist für $r_1 = r_2 = \frac{1}{2} p_1$

$$s_2 = p_2 - \frac{1}{2} p_1 ,$$

die Relation (3.2.13) gilt also bereits für

$$\sqrt{q_1} \geqq \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{1}{2} p_1 \left(p_2 - \frac{1}{2} p_1\right)} - \frac{1}{2} p_1\right], \tag{3.2.19}$$

und die Konstante q_1^* ist zu Null geworden, so daß sich jetzt aus (3.2.8) zu jedem $q_1 > 0$ ein $q_2 > q_1$ berechnen läßt.

Aus (3.2.13), (3.2.19) folgt übrigens die von Staržinskij [67] angegebene Stabilitätsbedingung (1.5.8): (3.2.13) gibt

$$p_1 = \sqrt{q_2} - \sqrt{q_1} ,$$

und (3.2.19) liefert

$$p_2 \leqq \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{\frac{1}{2} p_1}\left(2\sqrt{q_1} + \frac{1}{2} p_1\right)^2 = \frac{q_2 + 2\sqrt{q_1 q_2} + 5 q_1}{\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1}} .$$

Ersetzt man (gemäß Satz 3.1.2) in (3.1.10′) auch f durch eine Konstante, so werden die Ergebnisse weiter verbessert: da auch $\Delta s = 0$ (und damit $p_2 = p_1$) wird, gilt die (günstigste) Abschätzung (3.2.13) nun für jedes $q_1 > 0$.

Trotzdem ist auch das Ergebnis

$$\sqrt{q_2} = \sqrt{q_1} + p_1 \qquad (q_1 > 0)$$

— es ist das beste, das mit einer quadratischen Form mit konstanten Koeffizienten als Ljapunovscher Funktion überhaupt erzielt werden kann — noch erheblich schlechter als die Aussage, die Satz (1.5.2) in Verbindung mit den Sätzen 3.1.1 oder 3.1.2 liefert, daß nämlich äußerste Stabilität vorliegt, sofern die Ungleichung

$$\Psi(p_1, q_1, q_2) < 1 \tag{3.2.20}$$

erfüllt ist — denn dann ist (vgl. Bemerkung 1.5.4) statt (3.2.13) auch

$$\sqrt{q_2} = \sqrt{q_1} + \frac{\pi}{2} p_1 \qquad (q_1 \geqq 0)$$

noch zulässig.

Die Bedingung (3.2.20) dagegen ist die beste, die man (vgl. Bemerkung 1.5.2) aus den durch (3.2.2)—(3.2.4) gegebenen Informationen erhalten kann: Ist sie verletzt, so kann man ein System (3.2.6) angeben, dessen Ruhelage nicht mehr stabil ist.

Qualitativ andere Bedingungen für die Stabilität der Lösungen von (3.1.3) erhält man bei Verwendung Ljapunovscher Funktionen, die von den Koeffizienten der Systeme (3.1.10), (3.1.10′) explizit abhängen. (Diese Funktionen sind dann stets von gewissen Lösungen des Systems (3.1.3) und folglich von der Zeit abhängig.)

Betrachtet man etwa die als Ergebnis von Satz 3.1.1 gewonnene Gleichung (3.1.7), die nur noch einen nichtlinearen Term erhält, so ist der Ansatz einer Ljapunovschen Funktion

nach dem Schema „quadratische Form plus Integral der nichtlinearen Funktion" naheliegend. Es bietet sich hier etwa die schon in Abschnitt 2.1 zum Beschränktheitsnachweis verwendete Funktion (2.1.16) an. Berücksichtigt man, daß — im Vergleich mit Gleichung (2.0.1) — hier $e(t) \equiv 0$ und $f(x) \equiv c$ ist, so kann man $p(t) \equiv 0$, $h(x) = d\,x$ $(0 < d < c)$ wählen und erhält dann

$$V(u, w, t) = \int_0^u [G(x(t) + s, y(t), t) - G(x(t), y(t), t)]\, ds + \frac{1}{2}[(w + d\,u)^2 + d\,(c - d)\,u^2]\,. \quad (3.2.21)$$

Wir werden hierauf zurückkommen, betrachten jedoch vorher die rechnerisch einfacher zu behandelnde Funktion

$$V(u, w, t) = \frac{1}{2}[G_x(x(t), y(t), t)\,u^2 + (w + d\,u)^2 + d\,(c - d)\,u^2]\,, \quad (3.2.22)$$

die in gleicher Weise aus Gleichung (3.1.18) abgeleitet werden kann. Bildet man ihre zeitliche Ableitung zunächst mit Hilfe des allgemeinen Systems (3.1.10′), so erhält man (in etwas abgekürzter Schreibweise)

$$V'(u, w, t) = -\left\{\left[(f + d)\,G_x - \frac{1}{2}(G_x)' - d\,(G_y - c)\,f\right]u^2 - [(G_y - d)\,f - d\,(G_y - c)]\,u\,w + (G_y - d)\,w^2\right\}, \quad (3.2.23)$$

dabei ist $(G_x)'$ mit Hilfe des Systems (3.1.3) zu bilden, es ist

$$(G_x)' = G_{xx}\,y + G_{xy}\,(-f\,y - G) + G_{xt}\,.$$

Es ist hier schwierig, Bedingungen für die negative Definitheit von V' anzugeben. Dies wird jedoch wesentlich erleichtert, wenn man gemäß Satz 3.1.3 die Funktion $G_y(x, y, t)$ durch eine Konstante ersetzt: mit

$$G_y = c$$

wird aus (3.2.23)

$$V'(u, w, t) = -\left\{\left[(f + d)\,G_x - \frac{1}{2}(G_x)'\right]u^2 - (c - d)\,f\,u\,w + (c - d)\,w^2\right\}. \quad (3.2.24)$$

Setzt man hier

$$(f + c)\,G_x - \frac{1}{2}(G_x)' \geqq \delta > 0$$

voraus, so ist V' sicher negativ definit, wenn man nur $c - d$ (> 0) hinreichend klein wählt. Es gilt also

Satz 3.2.1. Das System (3.1.3) ist äußerst stabil, wenn $G(x, y, t)$ stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung besitzt und für $(x, y) \in B$, $t \geqq t_0$ die Bedingungen

$$G_y(x, y, t) \geqq c\,, \quad (3.2.25)$$

$$G_x(x, y, t) > 0 \quad (3.2.26)$$

und

$$\inf_t \left\{[f(x) + c]\,G_x(x, y, t) - \frac{1}{2}[G_x(x, y, t)]'\right\} > 0 \quad (3.2.27)$$

erfüllt sind. Dabei ist

$$[G_x(x, y, t)]' = G_{xx}(x, y, t)\,y + G_{xy}(x, y, t)\,[-f(x)\,y - G(x, y, t)] + G_{xt}(x, y, t)\,. \quad (3.2.28)$$

Bemerkenswert ist, daß dieser Satz dadurch, daß man (gemäß Satz 3.2.1) auch noch $f(x)$ durch eine Konstante abschätzt, nicht verbessert werden kann: die Bedingung (3.2.27) wird dabei im Gegenteil nur einschränkender.

Bemerkung 3.2.2. Aus der Ljapunovschen Funktion (3.2.21) und unter Benutzung der Gleichungen (3.1.10), (3.1.13) läßt sich in gleicher Weise ein analoger Satz ableiten:

Satz 3.2.2. Das System (3.1.3) ist äußerst stabil, wenn $G(x, y, t)$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt und für $(x, y) \in A$, $(x + u, y) \in A$, $t \geqq t_0$ die Bedingungen (3.2.25), (3.2.26) und

$$\inf_t \left\{ [F(x+u) - F(x) + c\,u]\,[G(x+u, y, t) - G(x, y, t)] - \int_0^u [G(x+s, y, t) - G(x, y, t)]'\, ds \right\} > 0 \tag{3.2.27'}$$

erfüllt sind. Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^u [G(x+s, y, t) - G(x, y, t)]'\, ds \\ &= [G(x+u, y, t) - G(x, y, t) - u\,G_x(x, y, t)]\, y \\ &\quad + \left[\int_0^u G_y(x+s, y, t)\, ds - u\,G_y(x, y, t)\right][-f(x)\, y - G(x, y, t)] \\ &\quad + \int_0^u G_t(x+s, y, t)\, ds - u\,G_t(x, y, t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.28'}$$

Die Bedingung (3.2.27′) ist im allgemeinen einschränkender als (3.2.27), sie enthält diese für $u \to 0$.

Bemerkung 3.2.3. Ersetzt man in (3.2.22) die Lösung $(x(t), y(t))$ durch einen konstanten mittleren Wert (x_0, y_0), so erhält man in den Fällen, wo $G_x(x, y, t)$ nicht explizit von t abhängt, als Ljapunovsche Funktion eine quadratische Form mit konstanten Koeffizienten. Entsprechend behandelt, liefert (3.2.21) in diesen Fällen eine Ljapunovsche Funktion, die von der Zeit nicht abhängt und wie (3.2.21) als nach dem Schema „quadratische Form plus Integral der (hier zeitlich gemittelten) Nichtlinearität" konstruiert interpretiert werden kann. Derartige Funktionen wurden von Bhatia [3] benutzt, um Bedingungen für die Stabilität der Lösungen weniger allgemeiner Gleichungen herzuleiten. Die so abgeleiteten Schranken für die Nichtlinearitäten sind aber [wie (3.2.27′) im Vergleich zu (3.2.27)] niemals günstiger als (3.2.13), (3.2.17).

3.3. Spezialfälle

Die Gleichung (3.0.1) enthält verschiedene bekannte und in der Literatur häufig untersuchte Differentialgleichungen als Spezialfälle, so die Gleichungen vom Typ

$$x'' + f(x, x')\, x' + g(x) = e(t)\,, \tag{3.3.1}$$

zu denen die Rayleighsche Gleichung

$$x'' + F(x') + g(x) = e(t) \tag{3.3.2}$$

und die Liénardsche Gleichung

$$x'' + f(x)\, x' + g(x) = e(t) \tag{3.3.3}$$

gehören. Formuliert man für diese Gleichungen die hier abgeleiteten Bedingungen für äußerste Stabilität, so findet man verschiedene aus der Literatur bekannte Stabilitätskriterien wieder und erhält in einigen Fällen auch Verbesserungen.

So ergibt sich für das zu Gleichung (3.3.1) äquivalente System

$$x' = y\,, \qquad y' = -\,g(x) - f(x, y)\, y + e(t) \tag{3.3.4}$$

der folgende

Satz 3.3.1. Für die Lösungen des Systems (3.3.4) sei der Bereich A eine endgültige Schranke. Sind dann für $(x, y) \in A$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} f(x, y) &\geqq c && (c > 0) , \\ y f_y(x, y) &\geqq -\delta && (0 \leqq \delta < c) , \\ k^2 &\leqq g'(x) \leqq h^2 , \\ |y f_x(x, y)| &\leqq \varepsilon && (0 \leqq \varepsilon < k^2) \end{aligned}$$

erfüllt und gilt in (1.5.4)

$$\Psi (c - \delta, k^2 - \varepsilon, h^2 + \varepsilon) < 1 ,$$

so ist das System (3.3.4) äußerst stabil.

Beweis. Das System entsteht aus (3.1.3) für

$$f(x) \equiv 0 , \qquad G(x, y, t) = g(x) + f(x, y)\, y - e(t) ,$$

es ist dann

$$\begin{aligned} G_x(x, y, t) &= g'(x) + f_x(x, y)\, y , \\ G_y(x, y, t) &= f(x, y) + f_y(x, y)\, y , \end{aligned}$$

die angegebenen Bedingungen sind nach Folgerung 3.1.1 hinreichend für äußerste Stabilität.

Einen ähnlichen Satz hat BHATIA [3] durch Konstruktion einer LJAPUNOVschen Funktion (vom in Bemerkung 3.2.3 beschriebenen Typ) bewiesen. Allerdings sind die dort für die Nichtlinearitäten vorgeschriebenen Schranken erheblich enger.

Gleiches gilt für den in [3] abgeleiteten Satz über äußerste Stabilität der RAYLEIGHschen Gleichung (3.3.2). Wir erhalten hier

Satz 3.3.2. Für das zu (3.3.2) äquivalente System

$$x' = y , \quad y' = -g(x) - F(y) + e(t) \tag{3.3.5}$$

sei der Bereich A eine endgültige Schranke, für $(x, y) \in A$ gelte

$$F'(y) \geqq c , \qquad k^2 \leqq g'(x) \leqq h^2$$

und

$$\Psi(c, k^2, h^2) < 1 .$$

Dann ist das System (3.3.5) äußerst stabil.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich [mit $f(x) \equiv 0, G_x(x, y, t) = g'(x), G_y(x, y, t) = F'(y)$] unmittelbar aus Folgerung 3.1.1.

Eine andere — von OPIAL [42] bewiesene — Bedingung für äußerste Stabilität des Systems (3.3.5) entnimmt man aus Folgerung 3.1.2: Es sei B zugleich relative und endgültige Schranke für die Lösungen, und für $(x, y) \in B$ gelte

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 , \qquad F'(y) > 0 , \\ 2 F'(y)\, g'(x) - g''(x)\, y > 0 . \end{aligned}$$

Sei $B \subset \{ |x| \leqq \overline{X}, |y| < Y \}$; hinreichend für das Bestehen der dritten Ungleichung ist dann

$$2 \min_{|y| \leqq \overline{X}} \frac{F'(y)}{|y|} > \max_{|x| \leqq \overline{X}} \frac{|g''(x)|}{g'(x)} .$$

Betrachtet man noch das zur LIÉNARDschen Gleichung (3.3.3) äquivalente System

$$x' = y , \quad y' = -f(x)\, y - g(x) + e(t) , \tag{3.3.6}$$

so liefert zunächst Folgerung 3.1.1 [mit $G(x, y, t) = g(x) - e(t)$; $G_x(x, y, t) = g'(x)$, $G_y(x, y, t) \equiv 0$] den

Satz 3.3.3. Für die Lösungen des Systems (3.3.6) sei der Bereich A eine endgültige Schranke, für $(x, y) \in A$ gelte

$$f(x) \geqq c\,, \qquad k^2 \leqq g'(x) \leqq h^2$$

und

$$\Psi(c, k^2, h^2) < 1\,.$$

Dann ist das System (3.3.6) äußerst stabil.

Dieser Satz findet sich in etwas anderer Formulierung schon bei Opial [46], er verbessert ähnliche Stabilitätskriterien von Zlámal [71], Loud [32], Reissig [57], [60], Bhatia [3] und Bibikov [5].

Und schließlich ergibt sich aus Satz 3.2.1 ein Kriterium, das bereits von Seifert [66] und Opial [44] (und in schwächerer Form in [7] und [63]) angegeben wurde: Das System (3.3.6) ist äußerst stabil, wenn ein Bereich B gleichzeitig relative und endgültige Schranke für die Lösungen ist und für $(x, y) \in B$ die Bedingungen

$$g'(x) > 0\,, \qquad f(x)\, g'(x) - \frac{1}{2} g''(x)\, y > 0$$

erfüllt sind.

[Mit $B \subset \{|x| \leqq \bar{X}\,,\ |y| \leqq \bar{Y}\}$ ist dafür

$$|g''(x)|\, \bar{Y} < 2 f(x)\, g'(x) \qquad \text{für} \qquad |x| \leqq \bar{X}$$

hinreichend.]

4. Beschränktheits- und Stabilitätsuntersuchungen in periodischen Systemen

Die in Kapitel 3 angeführten Sätze bezogen sich sämtlich auf den Begriff der äußersten Stabilität: Es wurden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß alle Lösungen der betrachteten Differentialgleichung für $t \to \infty$ gegeneinander konvergieren. Die dargestellten Überlegungen führen also sicher bei all den Differentialgleichungen nicht zum Ziel, die mindestens zwei nicht asymptotisch gleiche Lösungen besitzen. Bekanntlich ist diese Möglichkeit schon bei Differentialgleichungen sehr einfacher Bauart gegeben: die DUFFINGsche Gleichung

$$x'' + c\,x' + k^2\,(x + b\,x^3) = a\cos\omega\,t \tag{4.0.1}$$

beispielsweise besitzt (vgl. etwa [69]) für gewisse Kombinationen der (positiven) Parameter a, b, c, k, ω mehrere periodische Lösungen.

Aber selbst bei Gleichungen, deren Lösungen tatsächlich äußerst stabil sind, ist die Anwendung der abgeleiteten Kriterien bei weitem nicht immer möglich.

Versucht man, das Stabilitätsverhalten einer Lösung irgend einer speziellen Differentialgleichung — etwa vom Typ der LIÉNARDschen Gleichung (3.3.3) — aus den in Kapitel 3 angegebenen Sätzen zu beurteilen, so steht man zunächst vor dem Problem, für die Lösungen dieser Differentialgleichung eine endgültige Schranke zu bestimmen. Dieses Problem ist durch die in Kapitel 2 durchgeführten Überlegungen für eine sehr umfangreiche Klasse von Gleichungen des Typs (3.3.3) prinzipiell gelöst: man konstruiere nach dem angegebenen Schema eine LJAPUNOVsche Funktion V, ermittle eine Konstante C so, daß für alle Punkte (x, x') mit $V(x, x', t) \geqq C$ stets $V'(x, x', t) \leqq 0$ gilt, und bestimme schließlich einen Bereich $A_1(C)$ derart, daß außerhalb dieses Bereiches immer $V(x, x', t) \geqq C$ ist; $A_1(C)$ ist dann endgültige Schranke.

Tatsächlich aber wird man häufig feststellen, daß für die Parameterbereiche, aus denen die Lösungen von technischem Interesse sind, die so konstruierten Schranken sehr groß ausfallen. Die Differentialgleichung darf dann, um den Sätzen aus Kapitel 3 zu genügen, in einem sehr großen Bereich nur wenig von einer linearen Gleichung abweichen.

So wurde für die Lösungen der Gleichung (4.0.1) von REISSIG [57] eine endgültige Schranke $A = \{|x| \leq X, |y| \leqq Y\}$ mit

$$X = \frac{4\,a}{c\,k} \tag{4.0.2}$$

bestimmt (die von BHATIA [3] mit Hilfe einer LJAPUNOVschen Funktion ermittelte Schranke ist erheblich gröber), berechnet man damit die nach Satz 3.3.3 für äußerste Stabilität noch zulässige Größe der die Nichtlinearität kennzeichnenden Konstanten b, so erhält man (unter Verwendung der Näherung (1.5.9) für Ψ)

$$b \leqq b_0 = \frac{1}{3}\left[\left(1 + \frac{\pi}{2}\,\frac{c}{k}\right)^2 - 1\right]\left(\frac{c\,k}{4\,a}\right)^2, \tag{4.0.3}$$

dieser Wert wird mit der dritten Potenz der Dämpfungskonstanten c klein. (Beispiel: Für $a = k = 1$, $c = 0{,}2$ ist $\overline{X} = 20$, $b_0 \approx 0{,}0006$.)

Für die Lösungen stärker nichtlinearer Systeme konnten exakte Stabilitätsaussagen bisher noch nicht gegeben werden.

Man interessiert sich hier insbesondere für die Stabilität erzwungener Schwingungen, d. h. periodischer Lösungen in Systemen mit zeitlich periodischer äußerer Erregung, etwa von der Gestalt

$$x'' + F(x, x') + g(x) = e(t) , \qquad e\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = e(t) . \tag{4.0.4}$$

Zur genäherten Ermittlung derartiger Lösungen sind aus der quantitativen Theorie zahlreiche Methoden bekannt ([2], [24], [36], [69], [21], [9]), die Methode von Krylov-Bogoljubov [24] ist von besonderem Interesse, weil sie (vgl. [21], [22]) mit der Näherung für die gesuchte periodische Lösung gleichzeitig Näherungen für benachbarte Lösungen liefert und so die Formulierungen von (genäherten) Stabilitätsaussagen gestattet: Betrachtet man die Gleichung (4.0.4) mit einer harmonischen Störfunktion

$$e(t) = a \cos \omega t , \tag{4.0.5}$$

so ist nach Klotter und Pinney [22] eine hierzu harmonische Näherungslösung $\bar{x}(t) = \bar{x}\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$ in diesem Sinne stabil, wenn für $Q = \sup |\bar{x}(t)|$

$$\frac{\partial Q}{\partial a} > 0 \tag{4.0.6}$$

gilt, andernfalls instabil. Trägt man in einem (ω, Q)-Koordinatensystem die Schar der „Resonanzkurven" $Q = Q(\omega, a)$ (mit a als Scharparameter) auf, so trennen jeweils die Punkte, in denen die Kurven vertikale Tangenten besitzen, Stabilitäts- und Instabilitätsintervalle.

Ähnliche genäherte Stabilitätsaussagen erhält man, wenn man zu (4.0.4) die linearisierten Variationsgleichungen (1.3.6) für die (exakte) periodische Lösung $x^0(t)$, $[x^0(t)]' = y^0(t)$,

$$u' + F_y(x^0(t), y^0(t))\, u' + [g'(x^0(t)) + F_x(x^0(t), y^0(t))]\, u = 0 , \tag{4.0.7}$$

bildet, hier $x^0(t)$ durch eine — mit beliebigem Verfahren gewonnene — Näherung $\bar{x}(t)$ ersetzt und Bedingungen dafür formuliert, daß die Ruhelage der so entstehenden linearen Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten

$$u'' + F_y(\bar{x}(t), \bar{y}(t))\, u' + [g'(\bar{x}(t)) + F_x(\bar{x}(t), \bar{y}(t))]\, u = 0 \tag{4.0.8}$$

stabil ist. Stoker [69] entscheidet so die Stabilitätseigenschaften der Lösungen der ungedämpften ($c = 0$) Duffingschen Gleichung (4.0.1) aus der Untersuchung der für $\bar{x}(t) = Q \cos(\omega t + \vartheta)$ entstehenden Mathieuschen Gleichung

$$u'' + \left[1 + \frac{3}{2} b Q^2 (1 + \cos 2(\omega t + \vartheta))\right] u = 0;$$

Forbat [13], [14] gewinnt (genäherte) hinreichende Stabilitätsbedingungen für Lösungen der Gleichung (4.0.4) dadurch, daß er für die Koeffizienten der Gleichung (4.0.8) die Bedingungen (1.5.2) bzw. (1.5.4) vorschreibt.

Hier soll nun gezeigt werden, daß in periodischen Systemen die Kenntnis einer Näherungslösung es oft (beispielsweise in den von Forbat [13], [14] betrachteten Fällen fast immer) gestattet, das Stabilitätsverhalten der unbekannten periodischen Lösung $x^0(t)$ exakt zu beurteilen. Zunächst nämlich kann man mit den Hilfsmitteln des Kapitels 2 für die Abweichung der wahren Lösung von der vorliegenden Näherung Schranken bestimmen. Durch sie ist aber gleichzeitig ein Bereich in der Phasenebene festgelegt, in dem die Phasenbahn der Lösung $x^0(t)$ verläuft, und dieser Bereich — der nicht immer eine endgültige Schranke zu sein braucht — ist häufig hinreichend klein, um mit Hilfe der in Kapitel 3 formulierten Sätze den Schluß auf asymptotische Stabilität, zumindest im Kleinen, zu gestatten.

4.1. Verwendung von Näherungslösungen

Mit der Bezeichnung

$$I[x] \equiv x'' + F(x, x') + g(x) - e(t) \tag{4.1.1}$$

schreibt sich die Gleichung (4.0.4) in der Form

$$I[x] = 0\,. \tag{4.1.2}$$

Es sei vorausgesetzt, daß die Gleichung der Klasse D angehört, daß also ihre Lösungen in Zukunft beschränkt sind. Nach Satz 1.2.1 besitzt die Gleichung dann mindestens eine periodische Lösung der Periode $\frac{2\pi}{\omega}$. Der Ansatz eines Verfahrens zur näherungsweisen Bestimmung periodischer Lösungen ist also sinnvoll. Wir verwenden hier das von KAUDERER ([21], Ziffer 64) angegebene Verfahren der Annäherung durch endliche Summen trigonometrischer Funktionen: Die Näherung wird in der Gestalt

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos k\,\omega\,t + \beta_k \sin k\,\omega\,t) \tag{4.1.3}$$

angenommen, mit diesem Ausdruck wird das Funktional (4.1.1) gebildet und in eine FOURIER-Reihe entwickelt,

$$I[\bar{x}(t)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\,\omega\,t + b_k \sin k\,\omega\,t) \tag{4.1.4}$$

(die Formeln für die a_k, b_k sind bei KAUDERER angegeben).

Im allgemeinen wird es nicht möglich sein, $\bar{x}(t)$ so zu bestimmen, daß die Gleichung (4.1.2) exakt erfüllt ist, man bestimmt daher die $2n + 1$ Parameter α_k, β_k in (4.1.3) so, daß wenigstens die ersten $2n + 1$ FOURIER-Koeffizienten $(a_0, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n)$ in (4.1.4) zu Null werden. [Diese Forderung führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem für die α_k, β_k, dessen Auflösung oft allerdings erhebliche Schwierigkeiten bereitet, so daß man sich häufig auf eine Näherung mit $n = 1$ beschränkt.]

Hat man so $\bar{x}(t)$ bestimmt — im allgemeinen werden mehrere Lösungen möglich sein —, so wird damit

$$I[\bar{x}(t)] = m(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos k\,\omega\,t + b_k \sin k\,\omega\,t); \tag{4.1.5}$$

es ist

$$|m(t)| \leqq m = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\,, \tag{4.1.6}$$

die Größe der Konstanten m gibt ein gewisses Maß für die Güte der durch (4.1.3) gelieferten Approximation. — Später wird gelegentlich das Integral

$$M(t) = \int_0^t m(s)\,ds = \frac{1}{\omega} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} [a_k \sin k\,\omega\,t + b_k (1 - \cos k\,\omega\,t)] \tag{4.1.7}$$

von Interesse sein, für diese Funktion gilt die Abschätzung

$$|M(t)| \leqq M = \frac{1}{\omega} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} [\sqrt{a_k^2 + b_k^2} + b_k]\,. \tag{4.1.8}$$

Für die Näherung $\bar{x}(t)$ selbst und für ihre Ableitung entnimmt man aus (4.1.3) die Schranken

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}_1 \leqq \bar{x}(t) \leqq \bar{x}_2\,, \quad \bar{x}_{1,2} = \frac{1}{2}\alpha_0 \pm \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\,, \\ &|\bar{x}'(t)| \leqq \bar{y} = \omega \sum_{k=1}^{n} k \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.1.9}$$

Um nun die Differenz zwischen genäherter Lösung $\bar{x}(t)$ und exakter periodischer Lösung $x^0(t)$ zu beurteilen, benutzen wir die „Abstandsfunktion"

$$u(t) = x(t) - \bar{x}(t) \tag{4.1.10}$$

einer beliebigen Lösung der Gleichung (4.0.4) von der Funktion $\bar{x}(t)$. Wegen (4.1.2), (4.1.5) genügt sie der Differentialgleichung

$$u'' + [F(\bar{x}(t) + u, \bar{x}'(t) + u') - F(\bar{x}(t), \bar{x}'(t))] + [g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t))] = -m(t) \tag{4.1.11}$$

— die man statt (4.0.8) zu untersuchen hat, wenn man exakte Stabilitätsaussagen erhalten will.

Wir betrachten das zu (4.1.11) äquivalente System

$$\begin{aligned} u' = v\,, \qquad v' = &- [F(\bar{x}(t) + u, \bar{x}'(t) + v) - F(\bar{x}(t), \bar{x}'(t))] - \\ &- [g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t))] - m(t)\,. \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Seine Lösungen sind in Zukunft beschränkt wie die der Differentialgleichung (4.0.4), jeder periodischen Lösung des Systems entspricht umkehrbar eindeutig eine periodische Lösung von (4.0.4). Man erwartet, daß der durch $\bar{x}(t)$ angenäherten periodischen Lösung $x^0(t)$ eine Lösung $(u^0(t), v^0(t))$ in (4.1.12) entspricht, die in der Nähe der Ruhelage $u = v = 0$ verläuft — wobei „in der Nähe" bedeutet, daß

$$\sup \sqrt{(u^0(t))^2 + (v^0(t))^2}$$

[also die Maximalabweichung der Näherung $(\bar{x}(t), \bar{x}'(t))$ von der gesuchten Lösung $(x^0(t), x^{0\prime}(t))$ im (x, x')-Phasenraum] klein ist gegenüber

$$\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\right]^2 + \bar{y}^2}\,.$$

Man hat also eine derartige periodische Lösung des Systems (4.1.12) nachzuweisen, entweder mit Hilfe einer geeigneten Ljapunovschen Funktion oder durch Konstruktion eines geeigneten geschlossenen Weges. (Man hat dabei zu berücksichtigen, daß, wenn $\bar{x}(t)$ eine instabile Lösung der Gleichung (4.0.4) annähert, auch die gesuchte Lösung $(u^0(t), v^0(t))$ instabil ist.

Kann man zeigen, daß diese periodische Lösung in einem Bereich

$$|u| \leqq \bar{U}, \qquad |v| \leqq \bar{V} \tag{4.1.13}$$

verläuft, so hat man damit einerseits Schranken für die Abweichung der wahren periodischen Lösung $x^0(t)$ (und ihrer Ableitung $x^{0\prime}(t) = y^0(t)$) von der Näherung gewonnen:

$$|x^0(t) - \bar{x}(t)| \leqq \bar{U}\,, \qquad |y^0(t) - \bar{y}(t)| \leqq \bar{V}\,, \tag{4.1.14}$$

zum anderen erhält man daraus auch in Verbindung mit (4.1.9) absolute Schranken für die unbekannte periodische Lösung,

$$\bar{x}_1 - \bar{U} \leqq x^0(t) \leqq \bar{x}_2 + \bar{U}\,, \qquad |y^0(t)| \leqq \bar{y} + \bar{V}\,. \tag{4.1.15}$$

Diese Schranken sind — auch bei Gleichungen (4.04), die nur eine periodische Lösung besitzen — im allgemeinen erheblich besser als die für (4.0.4) direkt berechneten endgültigen Schranken und reichen häufig aus, um mit Hilfe der Variationsgleichungen (4.0.7) zumindest die asymptotische Stabilität der periodischen Lösung $x^0(t)$ im Kleinen nachzuweisen. Besitzt Gleichung (4.0.4) tatsächlich nur eine periodische Lösung, so gibt der Bereich (4.1.13) — und damit auch (4.1.15) im (x,y)-Phasenraum — meist sogar endgültige Schranken, so daß man mit Hilfe der Sätze aus Kapitel 3 auf asymptotische Stabilität im Großen, also äußerste Stabilität der Gleichung (4.0.4), schließen kann.

Bemerkung 4.1.1. Die hier dargestellte Methode des Stabilitätsnachweises berührt den Ideenkreis der totalen Stabilität (vgl. Definition 1.3.8): Neben der Differentialgleichung

$$x'' + F(x, x') + g(x) = e(t) + m(t)$$

(von der eine Lösung, nämlich $x = \bar{x}(t)$, bekannt ist) wird die „gestörte" Gleichung (4.0.4) betrachtet, von der — als „Störung" anzusprechenden — Differenz $m(t)$ kennt man im wesentlichen nur die Schranke (4.1.6).

Diese Schranke kann jedoch nicht — wie die Zahl δ_2 in Definition 1.3.8 — „hinreichend klein" gemacht werden, sondern hat einen festen positiven Wert. Man kann hier also nicht mit Hilfe des Satzes 1.3.4 aus der asymptotischen (also totalen) Stabilität der Lösung $\bar{x}(t)$ auf die Kleinheit der Differenz $\bar{x}(t) - x^0(t)$ schließen, sondern muß zur Abschätzung dieser Differenz andere Wege suchen.

4.2. Bestimmung der Fehlerschranken

Ein Verfahren zur Ermittlung eines Bereiches (4.1.13), das eine LJAPUNOVsche Funktion benutzt, soll hier für eine Gleichung (4.0.4) mit nur einer Nichtlinearität,

$$x'' + c\,x' + g(x) = e(t) \qquad \left(c > 0,\ e\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = e(t)\right) \tag{4.2.1}$$

beschrieben werden.

Zusätzlich sei

$$g'(x) > 0 \tag{4.2.2}$$

vorausgesetzt. Die Lösungen der Gleichung sind dann (nach Satz 2.2.2) in Zukunft beschränkt, falls das Integral $\int_0^{2\pi/\omega} e(s)\,ds$ verschwindet und $g(x)$ keine Pole besitzt. Andernfalls hat man (vgl. Folgerung 2.2.2 bzw. Satz 2.2.4) die zukünftige Beschränktheit durch zusätzliche Voraussetzungen sicherzustellen. Es sei

$$A = \{\overline{X}_1 \leqq x < X_2,\ |y| \leqq \overline{Y}\}\ , \tag{4.2.3}$$

eine endgültige Schranke; wegen (4.2.2) gilt

$$0 < k^2 \leqq g'(x) \leqq h^2 \qquad \text{für} \qquad X_1 \leqq x \leqq X_2\ . \tag{4.2.4}$$

Das Gleichungsystem (4.1.12) vereinfacht sich in diesem Falle zu

$$u' = v\ , \qquad v' = -\,c\,v - [g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t))] - m(t)\ . \tag{4.2.5}$$

Als LJAPUNOVsche Funktion verwenden wir wieder die Funktion (2.1.16), in der wir wieder — wie in (3.2.21) — die Funktion $h(x)$ in der Form

$$h(x) = d\,x \qquad (0 < d < c)$$

wählen können. Daneben betrachten wir zum Vergleich die Funktion, die sich ergibt, wenn man den zeitabhängigen Integranden $g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t))$ durch eine beliebige (nicht zeitabhängige) Funktion $h(u)$ (mit $u\,h(u) > 0$ für $u \neq 0$) ersetzt, die man später geeignet — etwa gemäß Bemerkung 3.2.3 — wählt. Wir haben also

$$V_{\mathrm{I}}(u, v, t) = \int_0^u [g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t))]\,d\,u + \frac{1}{2}\{[v + d\,u - p(t)]^2 + d\,(c - d)\,u^2\} \tag{4.2.6}$$

und

$$V_{\mathrm{II}}(u, v, t) = \int_0^u h(u)\,d\,u + \frac{1}{2}\{[v + d\,u - p(t)]^2 + d\,(c - d)\,u^2\}; \tag{4.2.7}$$

mit (4.2.5) ergibt sich als zeitliche Ableitung

$$V_{\mathrm{I}}' = -\,(W_0 + W_{\mathrm{I}})\ , \tag{4.2.8}$$

$$V_{\mathrm{II}}' = -\,(W_0 + W_{\mathrm{II}}) \tag{4.2.9}$$

mit

$$W_{\mathrm{I}}(u, v, t) = e\,u\,[g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t))] + f\,v^2 - [g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t)) - u\,g'(\bar{x}(t))]\,\bar{y}(t)\,,$$

$$W_{\mathrm{II}}(u, v, t) = e\,u\,[g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t))] + f\,v^2 + [g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t)) - h(u)]\,v$$

und

$$W_0(u, v, t) = [d\,u - p(t)]\,[g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t)) - q(t)] - e\,u\,[g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t))] - [(c - d)\,p(t) + q(t)]\,v + (c - d - f)\,v^2\,,$$

dabei ist

$$q(t) = -m(t) - p'(t)$$

und

$$0 < e < d\,, \qquad 0 \leqq f < c - d \tag{4.2.10}$$

zu setzen.

Wir fordern nun, daß V'_{I} bzw. V'_{II} in einem Ringgebiet in der (u,v)-Phasenebene, das mindestens eine Niveaulinie $V_{\mathrm{I}} = C$ bzw. $V_{\mathrm{II}} = C$ für alle Zeiten $t \geqq t_0$ enthält, negativ ist. Wir fixieren dazu die Konstanten d, e, f so, daß sie der Beziehung (4.2.10) genügen, und verlangen

$$W_{\mathrm{I}} \geqq 0 \qquad \text{bzw.} \qquad W_{\mathrm{II}} \geqq 0; \qquad W_0 > 0\,.$$

Die Forderung $W_0 > 0$ bestimmt die innere Berandung des Ringgebiets: Man kann Konstanten U, V so berechnen, daß für

$$|u| > U \qquad \text{oder} \qquad |v| > V$$

stets $W_0 > 0$ gilt. Es ist nämlich (mit

$$|p(t)| \leqq p\,, \qquad |q(t)| \leqq q$$

und (4.2.4)) einerseits

$$[d\,u - p(t)]\,[g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t)) - q(t)] - e\,u\,[g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t))] \geqq -\left\{[(d - e)\,\bar{u} + p]\left[h^2\,\bar{u} + \frac{d}{d - e}\,q\right] + \frac{e}{d - e}\,p\,q\right\} = -K$$

(mit

$$\bar{u} = \max\left\{\frac{p}{d - e}, \frac{d\,q}{k^2\,(d - e)}\right\}\right),$$

also

$$W_0(u, v, t) \geqq (c - d - f)\,v^2 - [(c - d)\,p + q]\,|v| - K\,,$$

andererseits

$$(c - d - f)\,v^2 - [(c - d)\,p(t) + q(t)]\,v \geqq -\frac{[(c - d)\,p + q]^2}{4\,(c - d - f)} = -L\,,$$

also für $|u| \geqq \bar{u}$

$$W_0(u, v, t) \geqq k^2\,(d - e)\,u^2 - [k^2\,p + d\,q]\,|u| - p\,q - L\,,$$

es genügt also,

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{k^2\,p + d\,q + \sqrt{(k^2\,p + d\,q)^2 + 4\,k^2\,(d - e)\,(p\,q + L)}}{2\,k^2\,(d - e)}\,, \\ V &= \frac{(c - d)\,p + q + \sqrt{((c - d)\,p + q)^2 + 4\,(c - d - f)\,K}}{2\,(c - d - f)} \end{aligned}\right\} \tag{4.2.11}$$

zu wählen.

Die zugehörige (minimale) äußere Berandung läßt sich dann in folgender Weise bestimmen: Wir betrachten nur solche Lösungen der Gleichung (4.2.1), die für $t \geqq t_0$ im Gebiet (4.2.3) verlaufen. Durch die Transformation

$$w = v - p(t)$$

bilden wir die (u,v)-Phasenebene auf eine (u,w)-Ebene ab. In dieser Ebene ist $W_0(u, v, t) = W_0(u, w + p(t), t)$ sicher positiv, solange

$$|u| > U \qquad \text{oder} \qquad |w| > W = V + p \tag{4.2.12}$$

gilt. Die LJAPUNOVschen Funktionen (4.2.6), (4.2.7) gestatten dann wegen (4.2.4) beide die Abschätzung

$$\frac{1}{2}[(k^2 + c\,d)\,u^2 + 2\,d\,u\,w + w^2]$$
$$\leqq V(u,\, w + p(t),\, t) \leqq \frac{1}{2}[(h^2 + c\,d)\,u^2 + 2\,d\,u\,w + w^2]\,. \tag{4.2.13}$$

Der größte Wert, den V im Bereich $|u| \leqq U$, $|v| \leqq V$ annehmen kann, ist

$$C_0 = \frac{1}{2}[(h^2 + c\,d)\,U^2 + 2\,d\,UW + W^2]\,, \tag{4.2.14}$$

jede Niveaulinie $V(u,\ w + p(t),\ t) = C$ mit $C > C_0$ verläuft also stets im Gebiet mit $W_0(u, w + p(t), t) > 0$.

Nun ist nach (4.2.13) einerseits

$$V(u, w + p(t), t) \geqq \frac{1}{2}[(k^2 + c\,d - d^2)\,u^2 + (d\,u + w)^2]\,,$$

andererseits

$$V(u, w + p(t), t) \geqq \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{k^2 + c\,d}\,u + \frac{d}{\sqrt{k^2 + c\,d}}\,w\right)^2 + \left(1 - \frac{d^2}{k^2 + c\,d}\right)w^2\right],$$

setzt man also

$$U = \sqrt{\frac{2\,(C_0 + \varepsilon)}{k^2 + c\,d - d^2}}\,, \qquad W = \sqrt{\frac{2\,(C_0 + \varepsilon)}{1 - \frac{d^2}{k^2 + c\,d}}} \tag{4.2.15}$$

($\varepsilon > 0$, beliebig klein), so ist man sicher, daß alle Niveaulinien $V(u, w + p(t), t) = C$, $C < C_0 + \varepsilon$ stets im Gebiet $|u| \leqq \overline{U}$, $|w| \leqq \overline{W}$ verlaufen. Das bedeutet aber: Für beide Funktionen (4.2.6), (4.2.7) verlaufen alle Niveaulinien $V(u, v, t) = C$ mit $C_0 < C < C_0 + \varepsilon$ für beliebiges $t \geqq t_0$ im Innern eines Ringgebietes in der (u, v)-Phasenebene, das außerhalb des Rechtecks

$$|u| \leqq U\,, \qquad |v| \leqq V \tag{4.2.16}$$

und innerhalb des Rechtecks

$$|u| \leqq \overline{U}\,, \qquad |v| \leqq \overline{V} = W + p \tag{4.2.17}$$

liegt.

Ist für die Punkte dieses Ringgebiets neben $W_0 > 0$ auch eine der Bedingungen $W_{\mathrm{I}} \geqq 0$ bzw. $W_{\mathrm{II}} \geqq 0$ erfüllt, so ist nach (4.2.8) bzw. (4.2.9) die totale zeitliche Ableitung der Funktion V_{I} bzw. V_{II} dort stets negativ, die Kurven $V = C$ ($C_0 < C < C_0 + \varepsilon$) können von den Lösungen des Systems (4.2.5) dann nur von außen nach innen durchsetzt werden. Für jede Lösung $(u(t), v(t))$ mit $|u_0| \leqq U$, $|v_0| \leqq V$ gilt

$$|u(t)| \leqq U\,, \qquad |v(t)| \leqq \overline{V}$$

für alle $t \geqq t_0$, das Rechteck (4.2.17) enthält also mindestens eine periodische Lösung.

Bemerkung 4.2.1. Die Abschätzung (4.2.13) ist nur richtig, wenn

$$\overline{U} < \min\{|\overline{X}_1 - \bar{x}_1|, \overline{X}_2 - \bar{x}_2\}\,, \qquad \overline{V} < \overline{Y} - \bar{y} - p$$

gilt. Sollten diese Bedingungen für (4.2.15) nicht erfüllt sein, so wird man die äußere Berandung des Ringgebiets direkt aus den endgültigen Schranken (4.2.3) bestimmen.

Andererseits ist oft $\overline{U}$ erheblich kleiner als $\min\{|\overline{X}_1 - \bar{x}_1|, \overline{X}_2 - \bar{x}_2\}$. Es genügt dann, Konstanten k^2, h^2 so zu bestimmen, daß $k^2 \leqq g'(x) \leqq h^2$ nur in einem gewissen Intervall $\bar{x}_1 - C \leqq x \leqq \bar{x}_2 + C$ ($C > 0$) gilt; man hat sich nachträglich zu überzeugen, daß $\overline{U} < C$ bleibt.

Bemerkung 4.2.2. Wählt man in der LJAPUNOVschen Funktion V_{I} bzw. V_{II} speziell

$$p(t) = -M(t)\,,$$

so vereinfacht sich W_0 zu

$$W_0(u, v, t) = [(d - e)\, u + M(t)]\, [g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t))] + (c - d)\, M(t)\, v + (c - d - f)\, v^2.$$

Man kann in diesem Falle für K die günstigere Schranke

$$K = \frac{h^2}{4\,(d - e)}\, M^2 \tag{4.2.18}$$

bestätigen und erhält damit aus den angegebenen Formeln

$$U = \frac{1}{2\,(d - e)} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{d - e}{c - d - f}\,(c - d)^2}\right] M\,,$$

$$V = \frac{c - d}{2\,(c - d - f)} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{c - d - f}{d - e}\left(\frac{h}{c - d}\right)^2}\right] M\,,$$

$$W = V + M;$$

weiter hat man C_0, U, $\bar{W}$ aus (4.2.14), (4.2.15) zu bestimmen und schließlich $\bar{V} = \bar{W} + M$ zu setzen.

Betrachten wir nun zunächst die Bedingung $W_{\mathrm{I}} \geqq 0$. Man kann hier $f = 0$ wählen und hat

$$e\, u\, [g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t))] - [g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t)) - u\, g'(\bar{x}(t))]\, \bar{y}(t) \geqq 0 \tag{4.2.19}$$

zu fordern. Setzt man $g(x)$ als zweimal stetig differenzierbar voraus, so kann man unter Benutzung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung diese Ungleichung in der Form

$$\left[e\, g'(\bar{x}(t) + \vartheta_1 u) - \frac{1}{2}\, g''(\bar{x}(t) + \vartheta_2 u)\, \bar{y}(t)\right] u^2 \geqq 0 \qquad (0 < \vartheta_{1,2} < 1)$$

schreiben. Notwendig für das Bestehen von (4.2.19) ist also

$$c\, g'(\bar{x}(t)) - g''(\bar{x}(t))\, \bar{y}(t) \geqq 0$$

— dies ist gerade die aus Satz 1.5.1 resultierende (und bei Forbat [13] angeführte) Stabilitätsbedingung für die Gleichung (4.0.8) (mit $F = c\, x'$). Hinreichend für

$$W_{\mathrm{I}}(u, v, t) \geqq 0 \qquad \text{für} \qquad |u| \leqq U$$

ist

$$\bar{y} \leqq \frac{2\, e \inf\limits_{x \in I} g'(x)}{\sup\limits_{x \in I} |g''(x)|}\,, \tag{4.2.20}$$

dabei bezeichnet I das Intervall $\bar{x}_1 - U \leqq x \leqq \bar{x}_2 + U$.

Die Ungleichung (4.2.20) gibt eine Bedingung für die Anwendbarkeit der Ljapunovschen Funktion V_{I}: die Ermittlung von Schranken (4.2.17) mit Hilfe der Funktion (4.2.6) ist nur dann möglich, wenn die Ableitung der Näherungsfunktion $\bar{x}(t)$ betragsmäßig hinreichend klein bleibt.

Eine ähnliche Bedingung beinhaltet auch die Forderung $W_{\mathrm{II}} \geqq 0$. W_{II} ist — als Funktion in v — positiv semidefinit, solange

$$4\, e\, f\, u\, [g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t))] - [g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t)) - h(u)]^2 = 0 \tag{4.2.21}$$

ist, diese Ungleichung muß also für $|u| \leqq \bar{U}$ und $\bar{x}_1 \leqq x \leqq \bar{x}_2$ bestehen. Setzt man abkürzend

$$D(u, t) = \frac{g(\bar{x}(t) + u) - g(\bar{x}(t))}{u}\,, \tag{4.2.22}$$

so ist (4.2.21) gleichwertig mit

$$D^2(u, t) - 2\left[\frac{h(u)}{u} + 2\, e\, f\right] D(u, t) + \left[\frac{h(u)}{u}\right]^2 = 0\,. \tag{4.2.23}$$

Es sei

$$D_1(u) = \inf D(u, t)\,, \qquad D_2(u) = \sup D(u, t)$$

und

$$\left.\begin{aligned} D_0(u) &= \frac{1}{2}\,[D_1(u) + D_2(u)]\,, \\ \Delta(u) &= \frac{1}{2}\,[D_2(u) - D_1(u)]\,; \end{aligned}\right\} \tag{4.2.24}$$

dann hat man

$$h(u) = u\,[D_0(u) - 2\,e\,f] \tag{4.2.25}$$

zu setzen [dabei sind e, f so zu wählen, daß stets

$$D_0(u) > 2\,e\,f \tag{4.2.26}$$

gilt] und erhält damit aus (4.2.23)

$$D_{1,2}(u) = D_0(u) \mp \sqrt{D_0^2(u) - [D_0(u) - 2\,e\,f]^2}\,,$$

also

$$\Delta^2(u) = 4\,e\,f\,[D_0(u) - e\,f]\,. \tag{4.2.27}$$

Diese Ungleichung hat für $|u| \leqq U$ zu bestehen. Sie schränkt die Abweichung des Differenzenquotienten (4.2.22) von seinem Mittelwert ein; bei nichtlinearer Funktion $g(x)$ bedeutet dies, daß die Näherungslösung $\bar{x}(t)$ nur in gewissen engen Grenzen variieren darf. Nur dann läßt sich eine Funktion V_{II} zur Konstruktion von Schranken (4.2.17) verwenden.

Die Ljapunovschen Funktionen (4.2.6), (4.2.7) sind also beide nur beschränkt anwendbar. In beiden Fällen betrifft aber diese Beschränkung nicht (zumindest nicht direkt) den Charakter der in Gleichung (4.2.5) eingehenden Nichtlinearität. Auch für stark nichtlineare Systeme sind die angegebenen Konstruktionen durchführbar, sofern nur die untersuchte periodische Lösung $x^0(t)$ [und also auch die Näherung $\bar{x}(t)$] eine nur kleine Amplitude besitzt.

An zwei speziellen, in der Literatur bereits mehrfach behandelten Gleichungen soll nun untersucht werden, in welchem Umfang dieses Verfahren zum Nachweis einer „hinreichend kleinen" periodischen Lösung des Systems (4.2.5) tatsächlich anwendbar ist. Bei der Betrachtung spezieller Gleichungen wird es möglich sein, die zur Konstruktion einer geeigneten Ljapunovschen Funktion notwendigen Bedingungen (4.2.19), (4.2.27) ausführlicher zu diskutieren.

4.3. Duffingsche Gleichung

Als erstes Beispiel soll die nach G. Duffing benannte Gleichung (4.0.1) betrachtet werden. Durch eine geeignete Änderung des Längen- und Zeitmaßstabes kann man die Konstante k auf Eins normieren. Eine zusätzliche Verschiebung der Zeitskala gestattet die Einführung einer Phasenverschiebungskonstante ϑ, die im folgenden bestimmt wird, und führt auf

$$x'' + c\,x' + x + b\,x^3 = a\cos(\omega\,t + \vartheta) \qquad (a, b, c, \omega > 0)\,. \tag{4.3.1}$$

Die Lösungen der Gleichung sind in Zukunft gleichmäßig beschränkt, eine endgültige Schranke ist nach Reissig [57] durch (4.0.2) gegeben. Die Gleichung besitzt also mindestens eine periodische Lösung, für die wir (wie [69], [21], [13], [19]) eine Näherung in der Form

$$\bar{x}(t) = Q\cos\omega\,t \tag{4.3.2}$$

suchen. Die Entwicklung (4.1.4) besitzt dann die Gestalt

$$I[\bar{x}(t)] = \left[(1 - \omega^2)\,Q + \frac{3}{4}\,b\,Q^3 - a\cos\vartheta\right]\cos\omega\,t + [-\,c\,\omega\,Q + a\sin\vartheta]\sin\omega\,t + \\ + \frac{1}{4}\,b\,Q^3\cos 3\,\omega\,t\,,$$

die Forderung nach Verschwinden der FOURIER-Koeffizienten nullter und erster Ordnung führt auf die Gleichungen

$$a \cos \vartheta = (1 - \omega^2)\, Q + \frac{3}{4} b\, Q^3 ,$$

$$a \sin \vartheta = c\, \omega\, Q$$

oder

$$\left[(1 - \omega^2)\, Q + \frac{3}{4} b\, Q^3\right]^2 + (c\, \omega\, Q)^2 = a^2 , \tag{4.3.3}$$

$$\tan \vartheta = \frac{c\, \omega}{1 - \omega^2 + \frac{3}{4} b\, Q^3} \tag{4.3.4}$$

für ϑ, Q und ω und liefert für (4.1.5), (4.1.7)

$$m(t) = \frac{1}{4} b\, Q^3 \cos 3\, \omega\, t , \qquad M(t) = \frac{1}{12\, \omega} b\, Q^3 \sin 3\, \omega\, t$$

und

$$m = \frac{b\, Q^3}{4} , \qquad M = \frac{b\, Q^3}{12\, \omega} . \tag{4.3.5}$$

Die Gleichung (4.3.3) beschreibt — mit a, b, c als Parametern — die Resonanzkurve des Systems, sie gibt die Abhängigkeit zwischen Q und ω an, entweder als Gleichung dritten Grades für $Q^2(\omega^2)$,

$$9\, b^2 Q^6 + 24\, b\, (1 - \omega^2)\, Q^4 + 16\, [(1 - \omega^2)^2 + c^2\, \omega^2]\, Q^2 - 16\, a^2 = 0 , \tag{4.3.6}$$

oder als quadratische Gleichung für $\omega^2(Q^2)$,

$$\omega^4 - 2\left(1 + \frac{3}{4} b\, Q^2 - \frac{1}{2} c^2\right) \omega^2 + \left(1 + \frac{3}{4} b\, Q^2\right)^2 - \frac{a^2}{Q^2} = 0 . \tag{4.3.7}$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln

$$\omega_{1,2}^2 = 1 + \frac{3}{4} b\, Q^2 - \frac{1}{2} c^2 \pm \sqrt{\frac{a^2}{Q^2} - c^2\left(1 + \frac{3}{4} b\, Q^2\right) + \frac{1}{4} c^4} , \tag{4.3.8}$$

sie sind reell, solange die Diskriminante

$$D = \left(\frac{a}{Q}\right)^2 - c^2\left(1 + \frac{3}{4} b\, Q^2\right) + \frac{1}{4} c^4$$

nichtnegativ ist. Der Grenzfall $D = 0$ liefert eine Gleichung für Q^2,

$$3\, b\, c^2 Q^4 + (4\, c^2 - c^4)\, Q^2 - 4\, a^2 = 0 ,$$

mit der (einzigen positiven) Wurzel

$$Q_0^2 = \frac{1}{6\, b\, c^2}\left[-(4\, c^2 - c^4) + \sqrt{(4\, c^2 - c^4)^2 + 48\, a^2\, b\, c^2}\right], \tag{4.3.9}$$

aus (4.3.8) folgt damit

$$\omega_0^2 = 1 + \frac{3}{4} b\, Q_0^2 - \frac{1}{2} c^2 \tag{4.3.10}$$

als der Wert, für den (4.3.7) eine Doppelwurzel besitzt.

Der Verlauf der Resonanzkurve läßt sich dann (vgl. [21]) in einem (ω^2, Q^2)-Diagramm folgendermaßen beschreiben: für $0 < Q < Q_0$ verläuft sie beiderseits der „Mittellinie“

$$\omega^2 = 1 + \frac{3}{4} b\, Q^2 - \frac{1}{2} c^2$$

im horizontal zu messenden Abstand $\sqrt{D}$, im Punkt (ω_0^2, Q_0^2) durchsetzt sie die Mittellinie mit horizontaler Tangente. Für $Q > Q_0$ existieren keine reellen Kurvenpunkte.

Der rechts der Mittellinie verlaufende Kurventeil besitzt für gewisse Parameterkombinationen zwei vertikale Tangenten; in dem dazwischenliegenden Intervall der ω^2-Achse hat die Gleichung (4.3.6) drei verschiedene reelle Wurzeln für Q, von denen nach dem Kriterium

von KLOTTER und PINNEY [22] [vgl. (4.0.6)] die mittlere einem instabilen Näherungswert (4.3.2) entspricht. Als geometrischen Ort der Berührungspunkte der Tangenten an den Resonanzkurven (für festes b, c und variables a) erhält man aus (4.3.3) durch Differentiation nach Q die Gleichung

$$\left(1 - \omega^2 + \frac{3}{4} b\, Q^2\right)\left(1 - \omega^2 + \frac{9}{4} b\, Q^2\right) + c^2\, \omega^2 = 0\,, \tag{4.3.11}$$

sie hat ihr Minimum bezüglich Q (vgl. [19]) im Punkt mit den Koordinaten

$$\omega_m^2 = 1 + \frac{3}{2} c^2 + c\sqrt{4 + 3\, c^2}\,, \qquad Q_m^2 = \frac{1}{3\, b}\left(4\, c^2 + 2\, c\sqrt{4 + 3\, c^2}\right).$$

Eine Resonanzkurve, die mit (4.3.11) keinen Punkt gemeinsam hat, enthält keinen instabilen Abschnitt; die Gleichung (4.3.6) besitzt dann für alle $\omega > 0$ nur eine reelle Wurzel Q^2. Hinreichend hierfür ist

$$Q_0^2 < \sqrt[3]{\frac{16\, a^2}{9\, b^2}}\,, \tag{4.3.12}$$

denn nach dem VIETAschen Wurzelsatz gilt für die drei Wurzeln der Gleichung (4.3.6) stets

$$Q_1^2\, Q_2^2\, Q_3^2 = \frac{16\, a^2}{9\, b^2}\,. \tag{4.3.13}$$

Zur Orientierung über die Größenordnung der Wurzeln seien einige Näherungsformeln angegeben: Einmal ist nach (4.3.9)

$$Q_0^2 = \frac{2\, a}{\sqrt{3b}} \frac{1}{c} - \frac{2}{3\, b} + O(c) \qquad (c \to 0)\,, \tag{4.3.14}$$

und da man für $\omega = \omega_0$ im Falle dreier reeller Lösungen $Q_2 \approx Q_1$ $(= Q_0)$ erwarten kann, erhält man für die dritte Lösung nach (4.3.13)

$$Q_3^2(\omega_0) \approx \frac{16\, a^2}{9\, b^2} \cdot \frac{1}{Q_0^4} \approx \frac{4\, c^2}{3\, b}\,; \tag{4.3.15}$$

zum anderen kann man, solange Q klein ist, in (4.3.6) die Glieder mit Q^6 und Q^4 vernachlässigen und daraus

$$Q^2 \approx \frac{a^2}{(1 - \omega^2)^2 + c^2\, \omega^2} \tag{4.3.16}$$

und für $\omega > 1$ und kleine c

$$Q \approx \frac{a}{\omega^2 - 1} \tag{4.3.17}$$

entnehmen.

Nach diesen Vorbereitungen untersuchen wir die Möglichkeit der Konstruktion LJAPUNOVscher Funktionen der Gestalt (4.2.6), (4.2.7) für das System (4.2.5), das hier die Form

$$u' = v\,, \qquad v' = -\,c\, v - [(1 + 3\, b\, \bar{x}^2(t))\, u + 3\, b\, \bar{x}(t)\, u^2 + b\, u^3] - m(t) \tag{4.3.18}$$

hat.

Die Funktion V_{I} (vgl. (4.2.6)) ist zum Nachweis einer periodischen Lösung geeignet, wenn die Bedingung (4.2.19) für $|u| \leqq U$, $|\bar{x}(t)| \leqq Q$, $|\bar{y}(t)| \leqq \omega\, Q$ erfüllt ist. Für das System (4.3.18) hat diese Bedingung die Gestalt

$$e\, u\, [(1 + 3\, b\, \bar{x}^2(t))\, u + 3\, b\, \bar{x}(t)\, u^2 + b\, u^3] - (3\, b\, \bar{x}(t)\, u^2 + b\, u^3)\, \bar{y}(t) \geqq 0$$

oder

$$u^2\, \{[e\,(1 + 3\, b\, \bar{x}^2(t)) - 3\, b\, \bar{x}(t)\, \bar{y}(t)] + [3\, e\, b\, \bar{x}(t) - b\, \bar{y}(t)]\, u + e\, b\, u^2\} \geqq 0\,. \tag{4.3.19}$$

Fordert man hier

$$4\, e\, b\, [e\,(1 + 3\, b\, \bar{x}^2(t)) - 3\, b\, \bar{x}(t)\, \bar{y}(t)] - [3\, e\, b\, \bar{x}(t) - b\, \bar{y}(t)]^2 \geqq 0\,, \tag{4.3.20}$$

so ist (4.3.19) sogar für beliebig großes u erfüllt. Diese letzte Ungleichung läßt sich in der Form

$$4\,e^2\,b + 3\,b^2\,[e\,\bar{x}(t) - \bar{y}(t)]^2 - 4\,b^2\,\bar{y}^2(t) \geqq 0 \tag{4.3.21}$$

schreiben und ist wegen $|\bar{y}(t)| \leqq \bar{y} = \omega\,Q$ sicher erfüllt, solange

$$Q \leqq \frac{e}{\omega\sqrt{b}} \tag{4.3.22}$$

gilt. Wegen $e < c$ hat man also stets

$$Q < Q_{\mathrm{I}} = \frac{c}{\omega\sqrt{b}} \tag{4.3.23}$$

zu fordern.

[Man kann diese Schranke noch verbessern, indem man (4.3.2) in (4.3.21) einsetzt; man erhält dann

$$\widetilde{Q}_{\mathrm{I}} = \left\{\sup_t\left[\sin^2\omega\,t - \frac{3}{4}\left(\frac{e}{\omega}\cos\omega\,t + \sin\omega\,t\right)^2\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}\frac{c}{\omega\sqrt{b}}\,.$$

Eine weitere Verbesserung ist dadurch möglich, daß man zunächst ein geeignetes U bestimmt und dann statt (4.3.20) nur (4.3.19) für $|u| \leqq \bar{U}$ fordert. In jedem Falle erhält man eine Beschränkung für die Amplitude Q der Näherungslösung.]

Eine ähnliche Bedingung erhält man für die Anwendbarkeit der Funktion V_{II} (vgl. (4.2.7)) aus der Forderung (4.2.27). Es ist hier

$$D(u,t) = 1 + 3\,b\,\bar{x}^2(t) + 3\,b\,x(t)\,u + b\,u^2 = 1 + \frac{1}{4}b\,u^2 + \frac{3}{4}b\,[u + 2\,\bar{x}(t)]^2\,,$$

also

$$D_1(u) = 1 + \frac{1}{4}b\,u^2 + \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |u| \leqq 2\,Q\,, \\ \frac{3}{4}b\,(|u| - 2\,Q)^2 & \text{für} \quad |u| > 2\,Q\,, \end{cases}$$

$$D_2(u) = 1 + \frac{1}{4}b\,u^2 + \frac{3}{4}b\,(|u| + 2\,Q)^2\,.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $|u| \leqq 2\,Q$. Dann ist

$$D_0(u) = 1 + \frac{1}{4}b\,u^2 + \frac{3}{8}b\,(|u| + 2\,Q)^2$$

und

$$\Delta(u) = \frac{3}{8}b\,(|u| + 2\,Q)^2\,,$$

die Ungleichung (4.2.27) hat die Form

$$\left[\frac{3}{8}b\,(|u| + 2\,Q)^2\right]^2 \leqq 4\,e\,f\left[1 + \frac{1}{4}b\,u^2 + \frac{3}{8}b\,(|u| + 2\,Q)^2 - e\,f\right]$$

oder

$$\frac{3}{8}b\,(|u| + 2\,Q)^2 \leqq 2\,e\,f + \sqrt{4\,e\,f\left(1 + \frac{1}{4}b\,u^2\right)}\,.$$

Hinreichend hierfür ist (wegen $0 \leqq |u| \leqq 2\,Q$)

$$\frac{3}{8}b\,(4\,Q)^2 \leqq 2\,e\,f + \sqrt{4\,e\,f}$$

oder

$$Q^2 \leqq \frac{1}{3\,b}\left(e\,f + \sqrt{e\,f}\right). \tag{4.3.24}$$

Sei nun $|u| > 2\,Q$. Dann ist

$$D_0(u) = 1 + b\,u^2 + 3\,b\,Q^2$$

und

$$\Delta(u) = 3\,b\,Q\,|u|\,,$$

(4.2.27) liefert die Ungleichung

$$9\,b^2\,Q^2\,u^2 \leqq 4\,e\,f\,(1 + b\,u^2 + 3\,b\,Q^2 - e\,f)\,. \tag{4.3.25}$$

Ist hier

$$Q^2 \leqq \frac{4\,e\,f}{9\,b}\,, \tag{4.3.26}$$

so ist (4.3.25) für beliebiges u erfüllt; ist

$$U^2 \leqq \frac{4\,e\,f}{3\,b}\,,$$

so besteht (4.3.25) für beliebiges Q; andernfalls hat man

$$\left(Q^2 - \frac{4\,e\,f}{9\,b}\right)\left(u^2 - \frac{4\,e\,f}{3\,b}\right) \leqq \frac{4\,e\,f\,(3 + e\,f)}{27\,b^2}$$

für $|u| \leqq U$, also

$$Q^2 \leqq \frac{4\,e\,f}{9\,b} + \frac{4\,e\,f\,(3 + e\,f)}{27\,b^2}\left(U^2 - \frac{4\,e\,f}{3\,b}\right)^{-1}\,, \tag{4.3.27}$$

zu fordern.

Berücksichtigt man, daß nach (4.2.26) $e\,f < \frac{1}{2}$ zu wählen ist ((4.3.26) ist dann stets kleiner, als (4.3.26)) und daß außerdem $e + f < c$, also $e\,f < \frac{1}{4}\,c^2$, gilt, so kann man für Gleichungen mit nicht extrem starker Dämpfung ($c < \sqrt{2}$) als maximale Schranken (vgl. (4.3.23))

$$Q_{\mathrm{II}}^2 = \frac{1}{12\,b}(c^2 + 2\,c) \qquad (|u| \leqq U \leqq 2\,Q) \tag{4.3.28}$$

bzw.

$$Q_{\mathrm{II}}^2 = \frac{1}{9\,b}\,c^2 \qquad (u \text{ beliebig groß}) \tag{4.3.29}$$

angeben.

Vergleicht man diese Werte mit dem Näherungswert (4.3.15) für die Amplitude der kleinsten Näherungslösung im Falle dreier verschiedener reeller Wurzeln der Gleichung (4.3.6), so sieht man, daß die Schranke (4.3.29) stets kleiner ist:

$$Q_{\mathrm{II}}^2 \approx \frac{1}{12}\,Q_3^2\,(\omega_0)$$

[dies war zu erwarten, denn da (4.3.29) für beliebig großes u gilt, gestattet es die Berechnung von (sehr kleinen) endgültigen Schranken], daß aber (4.3.28) für Gleichungen mit sehr schwacher Dämpfung $\left(\text{etwa für } c < \frac{2}{15}\right)$ größer ist und die Funktion V_{II} in diesen Fällen also Fehlerschranken auch für die kleinste von drei periodischen Lösungen zu berechnen ermöglicht.

Ein Vergleich zwischen (4.3.29) und (4.3.23) zeigt, daß Q_{I} für $\omega > 3$ die besseren Schranken liefert. Aus (4.3.17) kann man ungefähre Orientierungswerte für die ω-Intervalle erhalten, in denen Q die jeweiligen Bedingungen erfüllt: es ist

$$Q < Q_{\mathrm{I}} \qquad \text{für} \qquad \omega > \omega_{\mathrm{I}} \approx \frac{a\sqrt{b}}{2\,c} + \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{b}}{2\,c}\right)^2 + 1} \tag{4.3.30}$$

bzw.

$$Q < Q_{\mathrm{II}} \qquad \text{für} \qquad \omega > \omega_{\mathrm{II}} \approx \sqrt{\frac{3\,a\sqrt{b}}{c} + 1}\,; \tag{4.3.31}$$

für $\omega_{\mathrm{I,\,II}} < 3$, also etwa für

$$\frac{a\sqrt{b}}{c} < \frac{8}{3}\,, \tag{4.3.32}$$

liefert V_{I} die besseren Ergebnisse.

Die Berechnung der gesuchten Schranken aus der Bedingung $W_0(u, v, t) > 0$ bereitet — wie die folgenden Zahlenbeispiele zeigen — keine weiteren Schwierigkeiten.

Beispiel 4.3.1. Es sei

$$a = b = 1 , \qquad c = 0.2 .$$

Dann ist $\omega_0 = 2{,}20$ und

$$Q_1(\omega_0) = 2{,}27 , \qquad Q_2(\omega_0) = 2{,}24 , \qquad Q_3(\omega_0) = 0{,}262 .$$

Weiter ist $Q(0) = 0{,}72$ und aus Symmetriegründen auch $Q(1{,}66) = 0{,}72$. Durch diese Angaben ist der Verlauf der Resonanzkurve für $\omega < \omega_0$ angedeutet. Für $\omega > \omega_0$ ist ihr einziger Ast genähert durch (4.3.17) gegeben (diese Näherungsformel liefert hier $Q_3(\omega_0) = 0{,}260$).

Die Ungleichung (4.3.32) ist nicht erfüllt, wir verwenden also die Ljapunovsche Funktion V_{II}.

Aus (4.3.31) folgt $\omega_{II} = 4$. Wir beweisen

Satz 4.3.1. Die Gleichung

$$x'' + 0{,}2\, x' + x + x^3 = \cos(\omega t + \vartheta) \tag{4.3.33}$$

(ϑ gemäß (4.3.4)) besitzt für

$$\omega \geqq 4{,}5$$

genau eine periodische Lösung $x^0(t)$, diese Lösung ist asymptotisch stabil im Ganzen. Sie wird genähert durch (4.3.2) gegeben, für den Fehler der Näherung und ihrer Ableitung gilt

$$\left.\begin{aligned} |x^0(t) - \bar{x}(t)| &< 6\frac{Q^3}{\omega} , \\ |y^0(t) - \bar{y}(t)| &< 6\frac{Q^3}{\omega} . \end{aligned}\right\} \tag{4.3.34}$$

Beweis. Es ist $Q(4{,}5) = 0{,}0520$. [Für $\omega > 4{,}5$ ist $Q(\omega) < Q(4{,}5)$, die für $\omega = 4{,}5$ bewiesenen Abschätzungen gelten dort also erst recht.] Wir wählen $e = f = 0{,}08$. Dann ist die Relation (4.3.26) erfüllt, also $W_{II} \geqq 0$ für alle u, v.

In V_{II} setzen wir $d = 0{,}1$ und $p(t) = -M(t)$ und rechnen nach den in Bemerkung 4.2.2 angegebenen Formeln. Wir nehmen (vgl. Bemerkung 4.2.1) $\bar{U} < Q$ an, dann kann

$$k^2 = 1 , \qquad h^2 = 1 + 3\,b\,(2\,Q)^2 < 1{,}04$$

gesetzt werden; es ergibt sich

$$U < 51\,M , \qquad V < 29\,M ; \qquad \bar{U} < 63\,M , \qquad \bar{V} < 65\,M .$$

Nach (4.3.5) ist

$$M = \frac{Q^3}{12\,\omega} ,$$

daraus folgen die in (4.3.34) angegebenen Schranken. Tatsächlich ist für $\omega \geqq 4{,}5$ stets $\bar{U} < Q$. Der Bereich $|u| \leqq U$, $|v| \leqq \bar{V}$ ist endgültige Schranke, da $V'_{II} < 0$ überall außerhalb des Rechtecks $|u| \leqq U$, $|v| \leqq V$ gilt. Nach (4.3.34) ist dann der Bereich

$$|x| \leqq \bar{X} = Q + 6\frac{Q^3}{\omega} , \qquad |y| \leqq Y = \omega\,Q + 6\frac{Q^3}{\omega}$$

endgültige Schranke für die Lösungen der Gleichung (4.3.33). Für $\omega \geqq 4.5$ ist $\bar{X} \leqq 0{,}0522$, damit ist nach Satz 3.3.3 die Lösung $x^0(t)$ äußerst stabil. (Es ist $k^2 = 1$, $h^2 = 1 + 3\,b\,\bar{X}^2 \leqq$ $\leqq 1{,}0083$, also $h - k \leqq 0{,}0042 < \frac{\pi}{2}\,c$.)

Beispiel 4.3.2. Es sei

$$a = b = 1 , \qquad c = 0{,}02 .$$

Dann ist $\omega_0 = 6{,}46$, $Q_1(\omega_0) = 7{,}55$, $Q_2(\omega_0) = 7{,}54$, $Q_3(\omega_0) = 0{,}0239$; $Q(0) = Q_3(1{,}67) = 0{,}72$. Nach (4.3.31) ist $\omega_{II} = 12{,}3$. Etwa für $\omega > 13$ kann man also wieder, wie in Beispiel 4.3.1, die äußerste Stabilität der einzigen periodischen Lösung nachweisen. Wir betrachten hier

die andere Möglichkeit: den Nachweis einer im Kleinen stabilen Bewegung, der mit Hilfe der Funktion V_{II} (auch in Bereichen, wo mehrere periodische Lösungen existieren) möglich ist, solange Q kleiner ist als die durch (4.3.28) gegebene Schranke. Hier ist $\bar{Q}_{II} = 0{,}058$, $\bar{\omega}_{II} = 4{,}27$. Wir zeigen:

Satz 4.3.2. Die Gleichung

$$x'' + 0{,}02\,x' + x + x^3 = \cos(\omega t + \vartheta) \tag{4.3.35}$$

(ϑ gemäß (4.3.4)) besitzt für

$$\omega \geqq 5$$

eine (im Kleinen) asymptotisch stabile periodische Lösung $x^0(t)$, die genähert durch (4.3.2) gegeben wird (wo Q die kleinste Wurzel der Gleichung (4.3.6) ist) und für deren Abweichung von der Näherung

$$\left.\begin{aligned} |x^0(t) - \bar{x}(t)| &< 24\frac{Q^3}{\omega}, \\ |y^0(t) - \bar{y}(t)| &< 24\frac{Q^3}{\omega} \end{aligned}\right\} \tag{4.3.36}$$

gilt.

Beweis. Wie zum Beweis von Satz 4.3.1 setzen wir $p(t) = -M(t)$. Weiter sei $e = f = 0{,}006$ (dann ist die Relation (4.3.24) für $\omega \geqq 5$ erfüllt: $Q_3(5) = 0{,}042$, $\sqrt{\frac{1}{3\,b}(e\,f + \sqrt{e\,f})} = 0{,}045$) und $d = 0{,}01$, dann erhält man aus den in Bemerkung 4.2.2 angegeben Formeln (die Annahme $\bar{U} < Q$ gibt $h^2 = 1{,}03$)

$$U < 251\,M\,, \qquad V < 129\,M; \qquad \bar{U} < 285\,M\,, \qquad V < 286\,M\,.$$

Man überzeugt sich leicht, daß $U < Q$ (und damit erst recht die Nebenbedingung $U < 2\,Q$) erfüllt ist. — Für $x^0(t)$ erhält man die Schranken

$$|x^0(t)| < Q + 24\frac{Q^3}{\omega}, \qquad |y^0(t)| < \omega\,Q + 24\frac{Q^3}{\omega}, \tag{4.3.37}$$

die Ruhelage der zu $x_0(t)$ gebildeten linearen Variationsgleichung

$$u'' + 0{,}02\,u' + [1 + 3(x^0(t))^2]\,u = 0$$

ist nach Satz 1.5.2 asymptotisch stabil, da nach (4.3.37) für $\omega \geqq 5$ stets $|x^0(t)| < 0{,}043$ gilt.

4.4. Boittesche Gleichung

Als zweites Beispiel betrachten wir die Gleichung (2.2.8), die schon von Forbat und Huaux ([15], [17]—[19]) untersucht wurde und dort als Boittesche Gleichung bezeichnet wird.

Wir führen zur Vereinfachung des Lösungsansatzes wieder eine Phasenverschiebungskonstante ϑ ein und schreiben damit die Gleichung in der Form

$$x'' + c\,x' + k^2\frac{x}{1-x} = a\cos(\omega t + \vartheta) \qquad (x < 1;\, c, k, a, \omega > 0)\,. \tag{4.4.1}$$

Wir setzen voraus, daß die Lösungen der Gleichung in Zukunft beschränkt sind— dies ist beispielsweise unter den Bedingungen (2.2.9) der Fall — und suchen (vgl. [15]) für die dann sicher existierende periodische Lösung einen Näherungsausdruck der Form

$$\bar{x}(t) = A + Q\cos\omega t \qquad (A + Q < 1)\,. \tag{4.4.2}$$

Es ist

$$\frac{A + Q\cos\omega t}{1 - (A + Q\cos\omega t)} = \frac{1}{1-A}\left[\frac{1}{2}\,d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos n\,\omega\,t\right] - 1$$

mit

$$d_n = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+2k}{k} \left[\frac{Q}{2(1-A)}\right]^{n+2k} \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{4.4.3}$$

damit erhalten wir für (4.1.4)

$$I[x(t)] = k^2 \left(\frac{1}{1-A}\frac{1}{2} d_0 - 1\right) + \left(-\omega^2 Q + \frac{k^2}{1-A} d_1 - a \cos\vartheta\right) \cos\omega t +$$

$$+ (-c\,\omega\,Q + a \sin\vartheta) \sin\omega t + \frac{k^2}{1-A} \sum_{n=2}^{\infty} d_n \cos n\,\omega\,t\,.$$

(Alle angegebenen Reihen sind wegen $0 \leqq Q < 1 - A$ absolut konvergent.) Die Forderung nach Verschwinden der FOURIER-Koeffizienten nullter und erster Ordnung führt auf

$$\frac{1}{2} d_0 = 1 - A\,.$$

$$a \cos\vartheta = -\omega^2 Q + \frac{k^2}{1-A} d_1\,,$$

$$a \sin\vartheta = c\,\omega\,Q\,,$$

und da $\left[\text{wegen} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\binom{2k}{k} = (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}\right]$

$$d_0 = 2\left[1 - \left(\frac{Q}{1-A}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

und $\left[\text{wegen } 2\binom{2k+1}{k} = \binom{2(k+1)}{k+1}\right]$

$$d_1 = \frac{1-A}{Q}(c_0 - 2)$$

ist, erhalten wir hieraus die Bedingungsgleichungen

$$(1-A)^2 - Q^2 = 1 \tag{4.4.4}$$

und

$$a \cos\vartheta = -\omega^2 Q - \frac{2k^2 A}{Q}\,, \qquad a \sin\vartheta = c\,\omega\,Q$$

oder

$$\left(\omega^2 Q + \frac{2k^2 A}{Q}\right)^2 + (c\,\omega\,Q)^2 = a^2\,, \tag{4.4.5}$$

$$\tan\vartheta = -\frac{c\,\omega\,Q}{\omega^2 Q + \frac{2kA}{Q}}\,. \tag{4.4.6}$$

Die Relationen (4.4.4)—(4.4.6) sind mit den in [15] abgeleiteten identisch; darüber hinaus aber erhalten wir hier eine Abschätzung für das Fehlerglied $m(t)$ in der Differentialgleichung für $\bar{x}(t)$: es ist

$$m(t) = \frac{k^2}{1-A} \sum_{n=2}^{\infty} d_n \cos n\,\omega\,t\,,$$

also

$$|m(t)| \leqq \frac{k^2}{1-A} \sum_{n=2}^{\infty} d_n\,,$$

und

$$M(t) = \frac{k^2}{1-A} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\omega} d_n \sin n\,\omega\,t\,,$$

$$|M(t)| \leqq \frac{k^2}{1-A} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\omega} d_n < \frac{1}{2\,\omega} \frac{k^2}{1-A} \sum_{n=2}^{\infty} d_n\,.$$

Nun ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n = 2 \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{Q}{2(1-A)} \right)^l \sum_{r=0}^{\left[\frac{l-2}{2}\right]} \binom{l}{r}$$

und

$$\sum_{r=0}^{\left[\frac{l-2}{2}\right]} \binom{l}{r} < \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{l} \binom{l}{r} = \frac{1}{2} \cdot 2^l ,$$

also

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n < \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{Q}{1-A} \right)^l = \frac{Q^2}{(1-A)(1-A-Q)} .$$

Damit erhalten wir die Schranken

$$|m(t)| \leqq m = \frac{k^2 Q^2}{(1-A)^2 (1-A-Q)} \tag{4.4.7}$$

und

$$|M(t)| \leqq M = \frac{k^2 Q^2}{2\omega (1-A)^2 (1-A-Q)} . \tag{4.4.8}$$

Aus (4.4.4.), (4.4.5) kann man Q eliminieren, man erhält dann eine Relation zwischen ω und A, die man als quadratische Gleichung für $\omega^2(A)$,

$$A(A-2)^2 \omega^4 + (A-2)[4k^2 A + c^2 (A^2 - 2A)] \omega^2 + 4k^4 A - a^2 (A-2) = 0 , \tag{4.4.9}$$

oder als Gleichung dritten Grades für $A(\omega^2)$,

$$F(A) \equiv (\omega^4 + c^2 \omega^2) A^3 + (-4\omega^4 + 4k^2 \omega^2 - 4c^2 \omega^2) A^2 + \\ + (4\omega^4 - 8k^2 \omega^2 + 4k^4 + 4c^2 \omega^2 + a^2) A + 2a^2 = 0 , \tag{4.4.10}$$

schreiben kann.

Für die Wurzeln A_i dieser letzten Gleichung gilt wegen (4.4.4)

$$(1 - A_i)^2 \geqq 1 ,$$

für reelle A_i also $A_i \leqq 0$ oder $A_i \geqq 2$. Für den Ansatz (4.4.2) sind wegen $A < 1 - Q \leqq 1$ nur Lösungen mit

$$A < 0 \tag{4.4.11}$$

brauchbar. Für die „Resonanzkurve" $A(\omega)$ in diesem Bereich kann man ähnliche Betrachtungen anstellen wie für die Resonanzkurve $Q(\omega)$ der Duffingschen Gleichung in 4.3; wir beschränken uns hier auf die Bemerkung, daß (4.4.10) im Bereich (4.4.11) für gewisse Parameterwerte ebenfalls drei reelle Wurzeln besitzt [die Behauptung in [15], daß stets genau eine reelle Wurzel existiert, ist unrichtig: selbst für den dort ausführlich untersuchten Spezialfall

$$x'' + 0{,}2\, x' + \frac{x}{1-x} = 0{,}5 \cos(\omega t + \vartheta) \tag{4.4.12}$$

besitzt beispielsweise für $\omega^2 = 0{,}4$ die Gleichung (4.4.10) die Wurzeln $A_1 = -0{,}703$, $A_2 = -1{,}314$, $A_3 = -3{,}073$], daß aber sicher nur eine reelle Wurzel existiert, sobald

$$\omega^2 > k^2 - c^2 \tag{4.4.13}$$

ist (denn dann ist in (4.4.10) $F(0) > 0$, $F''(A) < 0$ für $A \leqq 0$).

Sind die Wurzeln $A(\omega)$ bekannt, so kann man dazu aus (4.4.4) $Q(\omega)$ (> 0) eindeutig bestimmen. In [15] wurden für die Gleichung (4.4.12) die Punkte der Kurve $Q(\omega)$ für $\omega \geqq 2$ numerisch berechnet und mit den mit Hilfe eines Analogrechners ermittelten Amplituden der exakten Lösungen verglichen, für $\omega \geqq 4$ wurde eine „excellente concordance" festgestellt (und damit die Ersetzung der periodischen Lösung durch die Näherung (4.4.2) in den linearisierten Variationsgleichungen (4.0.7) als ausreichend legitimiert angesehen).

Wir werden diese „hervorragende Übereinstimmung“ mit Hilfe der Ljapunovschen Funktionen (4.2.6), (4.2.7) nachweisen. Das zu untersuchende System (4.2.5) hat hier die Gestalt

$$u' = v\,, \qquad v' = -\,c\,v - \frac{k^2\,u}{(1-\bar{x}(t))\,(1-\bar{x}(t)-u)} - m(t)\,, \tag{4.4.14}$$

dabei hat stets

$$u < 1 - \bar{x}(t)$$

zu gelten; wir erhalten hier also ein System mit zeitabhängigem Definitionsbereich (gemäß Voraussetzung 1.1.1).

Die Funktion V_{I} ist zur Konstruktion von Schranken geeignet, sofern für $|u| \leqq U$, $A - Q \leqq \bar{x}(t) \leqq A + Q$, $|\bar{y}(t)| \leqq \omega\,Q$ die Ungleichung (4.2.19) besteht. Sie hat hier die Gestalt

$$\frac{k^2\,u^2}{(1-\bar{x}(t))\,(1-\bar{x}(t)-u)}\left[e - \frac{\bar{y}(t)}{1-\bar{x}(t)}\right] \geqq 0 \tag{4.4.15}$$

und ist für beliebiges $u < 1 - \bar{x}(t)$ erfüllt, wenn man

$$\frac{\omega\,Q}{1-A-Q} \geqq e \tag{4.4.16}$$

voraussetzt. Da nach (4.2.10) stets $e < c$ gilt, ist eine Funktion V_{I} also nur verwendbar, solange

$$\frac{\omega\,Q}{1-A-Q} < c \tag{4.4.17}$$

ist. Sie liefert dann aber sogar endgültige Schranken für die Lösungen des Sytems (4.4.14): solange im gesamten Definitionsbereich $W_{\mathrm{I}} \geqq 0$ ist, genügt V_{I} allen Voraussetzungen des Satzes 1.4.3.

Diese Schranken können in der in 4.2 angegebenen Weise berechnet werden.

Beispiel 4.4.1. Wir betrachten die Gleichung (4.4.12). Aus dem Diagramm der Funktion $Q(\omega)$ in [15] entnehmen wir, daß die Funktionen $Q(\omega)$ und $\omega\,Q(\omega)$ für $\omega \geqq 2$ monoton abnehmen und für $\omega \to \infty$ gegen Null streben [Gleiches gilt für $A(\omega)$ und — nach (4.4.7), (4.4.8) — für $m(\omega)$, $M(\omega)$]. Die Bedingung (4.4.17) ist etwa für $\omega > 3{,}5$ erfüllt. Wir beschränken uns auf das Intervall $\omega \geqq 4$ und beweisen den folgenden Satz:

Satz 4.4.1. Die Gleichung

$$x'' + 0{,}2\,x' + \frac{x}{1-x} = 0{,}5\cos(\omega\,t + \vartheta)$$

(ϑ gemäß (4.4.6)) besitzt für

$$\omega \geqq 4$$

genau eine periodische Lösung $x^0(t)$, diese Lösung ist asymptotisch stabil im Großen. Sie wird genähert durch (4.4.2) gegeben, für den Fehler der Näherung gilt

$$\left.\begin{aligned} |x^0(t) - \bar{x}(t)| &< 26\frac{Q^2}{\omega}\,, \\ |y^0(t) - y(t)| &< 25\frac{Q^2}{\omega}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.4.18}$$

Beweis. Für $\omega = 4$ ist

$$A = -\,0{,}000\,554\,, \qquad Q = 0{,}0333\,, \qquad \frac{\omega\,Q}{1-A-Q} < 0{,}137\,,$$

(4.4.16) ist also erfüllt, wenn man $e = 0{,}14$ wählt. Weiter setzen wir in (4.2.6) $d = 0{,}17$, $f = 0$ und $p(t) = -\,M(t)$. Die Annahme $\bar{U} < Q$ führt auf $k^2 = g'(A - 2\,Q) > 0{,}87$, $h^2 = g'(A + 2\,Q) < 1{,}15$. Damit ergibt sich

$$U < 34\,M\,, \qquad V < 19\,M\,; \qquad U < 49\,M\,, \qquad V < 47\,M\,.$$

Nach (4.4.8) ist für $\omega \geqq 4$

$$M = \frac{1}{2\,(1-A)^2\,(1-A-Q)}\,\frac{Q^2}{\omega} \leqq 0{,}52\,\frac{Q^2}{\omega},$$

daraus folgt (4.4.18). Für $x^0(t)$, $y^0(t)$ ergeben sich daraus die Schranken

$$A - \left(Q + 26\,\frac{Q^2}{\omega}\right) \leqq x^0(t) \leqq A + \left(Q + 26\,\frac{Q^2}{\omega}\right), \qquad |y^0(t)| \leqq \omega\,Q + 25\,\frac{Q^2}{\omega}.$$

Für $\omega \geqq 4$ gilt danach stets

$$|x^0(t)| \leqq 0{,}042\,, \qquad |y^0(t)| \leqq 0{,}141\,, \tag{4.4.19}$$

— und diese Informationen reichen aus, um für die unbekannte periodische Lösung die asymptotische Stabilität im Großen nachzuweisen. Man kann dazu etwa Satz 3.2.1 heranziehen, man kann den Beweis aber auch — ohne Benutzung endgültiger Schranken — direkt mit Hilfe der gleichen Ljapunovschen Funktion (4.2.6) führen: für die zu $(x^0(t), y^0(t))$ gebildeten Differentialgleichungen der gestörten Bewegungen,

$$u' = v\,, \qquad v' = -\,c\,v - \frac{k^2\,u}{(1-x^0(t))\,(1-x^0(t)-u)}\,,$$

besitzt die Ljapunovsche Funktion

$$V_{\mathrm{I}}^{(0)}(u,v,t) = \int_0^u \frac{k^2\,u\,du}{(1-x^0(t))\,(1-x^0(t)-u)} + \frac{1}{2}\,[(v+d\,u)^2 + d\,(c-d)\,u^2]$$

eine [im gesamten Definitionsbereich $u < 1 - x^0(t)$] negativ definite Ableitung, sofern nur (vgl. (4.4.15))

$$\left|\frac{y^0(t)}{1-x^0(t)}\right| \leqq e < c$$

gilt — und dies ist durch (4.4.19) gesichert.

Wir betrachten noch die zweite Möglichkeit zur Konstruktion der Schranken $\bar{U}$, $\bar{V}$, die Auswertung der Ljapunovschen Funktion (4.2.7). Allerdings führt die optimale Wahl der Hilfsfunktion $h(u)$ (gemäß (4.2.25)) hier zu schwer überschaubaren Ausdrücken, so daß wir auf eine Durchrechnung verzichten; aber auch der einfachere Ansatz

$$h(u) = k^2\,\frac{u}{1-u} \tag{4.4.20}$$

liefert hier ein neues Ergebnis. Die Bedingung (4.2.21) — die für $|u| \leqq \bar{U}$, $A - Q \leqq \bar{x}(t) \leqq A + Q$ zu erfüllen ist — hat dann die Gestalt

$$k^2\,u^2\left\{\frac{4\,e\,f}{f\,(1-\bar{x}(t))\,(1-\bar{x}(t)-u)} - k^2\left[\frac{1}{(1-\bar{x}(t))\,(1-\bar{x}(t)-u)} - \frac{1}{1-u^2}\right]^2\right\} \geqq 0$$

oder

$$\frac{1}{(1-\bar{x}(t))\,(1-\bar{x}(t)-u)}\left[\frac{\bar{x}(t)\,(2-\bar{x}(t)-u)}{1-u}\right]^2 < \frac{4\,e\,f}{k^2}\,.$$

Es sei u_0 die kleinste Wurzel der Gleichung

$$\frac{1}{(1-A-Q)\,(1-A-Q-u)}\left[\frac{(Q-A)\,(2+Q-A-u)}{1-u}\right]^2 = \frac{4\,e\,f}{k^2}\,, \tag{4.4.21}$$

dann ist sicher (4.2.21) im angegebenen Bereich erfüllt, falls nur

$$u_0 > \bar{U} \tag{4.4.22}$$

gilt. [Aus $u_0 > 0$ folgt mit $e\,f < \frac{1}{4}\,c^2$ als notwendige Bedingung

$$\frac{(Q-A)\,(2+Q-A)}{1-A-Q} < \frac{c}{k}\,,$$

also etwa $Q < \frac{c}{2\,k}$].

Ein Vergleich der Bedingung (4.4.22) mit (4.4.17) — und somit ein Vergleich der Anwendungsbereiche der Funktionen V_{I} und V_{II} — würde die Kenntnis eines (zumindest genäherten) expliziten Ausdrucks für $Q(\omega)$ voraussetzen. Wir bemerken hier nur, daß V_{II} zur Gewinnung endgültiger Schranken ungeeignet ist [es gilt $V_{\mathrm{II}} \to \infty$ für $u \to 1$, die Grenze des Definitionsbereiches für das System (4.4.14) ist jedoch durch $u = 1 - \bar{x}(t)$ gegeben] daß sie aber — wie das folgende Beispiel zeigt — in Spezialfällen die asymptotische Stabilität (im Kleinen) einer periodischen Lösung in weiteren Grenzen nachzuweisen gestattet als die Funktion V_{I}: in Ergänzung zu Satz 4.4.1 gilt

Satz 4.4.2. Die Gleichung

$$x'' + 0{,}2\,x' + \frac{x}{1-x} = 0{,}5\cos(\omega t + \vartheta)$$

besitzt für

$$\omega \geqq 3$$

eine (im Kleinen) asymptotisch stabile periodische Lösung, die genähert durch (4.4.2) gegeben wird und für deren Abweichung von der Näherung

$$\left.\begin{aligned} |x^0(t) - \bar{x}(t)| &< 42\frac{Q^2}{\omega}, \\ |y^0(t) - \bar{y}(t)| &< 39\frac{Q^2}{\omega} \end{aligned}\right\} \tag{4.4.23}$$

gilt.

Beweis. Für $\omega = 3$ ist

$$A = -\,0{,}0019\,, \qquad Q = 0{,}0623\,.$$

Wir wählen $e = f = 0{,}08$, dann ist die kleinste Wurzel der Gleichung (4.4.21)

$$u_0 = +\,0{,}114\,.$$

Wir setzen in (4.2.6) $d = 0{,}1$ und $p(t) = -M(t)$, nehmen $\overline{U} < Q$ an, können dann $k^2 = 0{,}78$, $h^2 = 1{,}31$ wählen und berechnen gemäß Bemerkung 4.2.2

$$U < 51\,M,\ V < 32\,M; \quad \overline{U} < 79\,M,\ V < 72\,M.$$

Für $\omega \geqq 3$ ist nach (4.4.8)

$$M \leqq 0{,}54\frac{Q^2}{\omega},$$

daraus ergeben sich die Schranken in (4.4.23). Weiter ist $42\,Q/\omega < 0{,}88$, es gilt also richtig $\overline{U} < Q$ und $\overline{U} < u_0$. Für $x^0(t)$ erhalten wir

$$A - \left(Q + 42\frac{Q^2}{\omega}\right) \leqq x^0(t) \leq A + \left(Q + 42\frac{Q^2}{\omega}\right), \qquad |y^0(t)| \leqq \omega\,Q + 39\frac{Q^2}{\omega}$$

und speziell

$$|x^0(t)| \leqq X < 0{,}119\,. \tag{4.4.24}$$

Diese Schranke ist bereits zu groß, als daß es möglich wäre, den Beweis für die asymptotische Stabilität der periodischen Lösung mit Hilfe der Ljapunovschen Funktionen V_{I} oder V_{II} zu führen. Zum Nachweis der lokalen asymptotischen Stabilität von $x^0(t)$ genügt aber (vgl. Satz 1.3.2) bereits die Untersuchung der Variationsgleichung (4.0.7), die hier die Gestalt

$$u'' + c\,u' + \frac{k^2\,u}{(1 - x^0(t))^2} = 0$$

hat. Da $x^0(t)$ periodisch ist, besitzt (4.4.25) periodische Koeffizienten und gestattet die Anwendung des Satzes 1.5.3, der mit $n = 0$, d. h. unter der Bedingung

$$\frac{k^2}{(1 - X)^2} - \frac{c^2}{4} \leq \frac{\omega^2}{4},$$

die asymptotische Stabilität der Ruhelage der Gleichung (4.4.25) garantiert. Diese Bedingung ist (für $k = 1$, $c = 0{,}2$) wegen (4.4.24) für $\omega \geqq 3$ immer erfüllt.

5. Abschätzung der Übergangsprozesse

Als Übergangsprozesse bezeichnet man [in Anlehnung an Begriffsbildungen der Regelungstheorie] die Lösungen eines Differentialgleichungssystems (1.1.1), die im Einzugsbereich einer gewissen (als „ungestörte Bewegung" ausgewählten) stabilen Lösung entspringen und folglich für $t \to \infty$ gegen diese Lösung streben. Bei technischen Anwendungen, insbesondere in der Regelungstechnik, interessiert man sich häufig für den zeitlichen Verlauf dieser gegenseitigen Annäherung. Man versucht daher, das Abklingen der Störungen quantitativ zu erfassen.

Eine sehr allgemeine Aussage dieser Art gibt Satz 1.3.1; geeignete Spezialisierungen der dort eingeführten Vergleichsfunktion $\Theta(t - t_0)$ führten zu den Begriffen der exponentiellen Stabilität bzw. des schwach intensiven Verhaltens der Störungen.

Zur Herleitung von Abschätzungen für die Übergangsprozesse in Differentialgleichungssystemen zweiter Ordnung finden sich in der Literatur die gleichen zwei Gruppen von direkten Methoden wie auch zum Beschränktheits- und Stabilitätsnachweis: einerseits werden in der (x, y)-Phasenebene Systeme von Vergleichskurven konstruiert (die aus Stücken von Lösungskurven linearer Systeme mit konstanten Koeffzienten zusammengesetzt werden), so gewinnt Olech [41] Exponentialabschätzungen für die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit zeitabhängigen Koeffizienten, Reissig [58], [62] für die Übergangsprozesse der Duffingschen und Liénardschen Gleichung.

Andererseits sind Ljapunovsche Funktionen auch für derartige quantitative Abschätzungen ein geeignetes Hilfsmittel. Genügt nämlich eine positiv definite Funktion $V(x, y, t)$ [mit $V(t) = V(x(t), y(t), t)$ bezeichnen wir die Werte von V längs der Lösungskurve $(x(t), y(t))$] einer Differentialungleichung

$$\frac{V'(t)}{V(t)} \leqq -\delta \qquad (\delta > 0)\,, \tag{5.0.1}$$

so erhält man durch Integration längs der Lösungskurve

$$V(t) \leqq V(t_0)\, e^{-\delta (t - t_0)} \tag{5.0.2}$$

und kann daraus oft auf eine Abschätzung vom Typ (1.3.5) schließen. Beispielsweise folgt aus der Existenz einer Funktion $V(x, y, t)$ mit

$$\alpha\, r^m \leqq V(x, y, t) \leqq \beta\, r^m\,, \qquad V'(x, y, t) \leqq -\gamma\, r^m \tag{5.0.3}$$

($r = \sqrt{x^2 + y^2}$; α, β, γ, m positive Konstanten) für die Lösungen der Differentialgleichung die Ungleichung

$$r(t) \leqq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}} r_0\, e^{-\frac{\gamma}{m\beta}(t - t_0)}\,. \tag{5.0.4}$$

Reissig [59] hat die in dieser Weise [mit dem Ansatz $V'(x, y, t) = -(x^2 + y^2)$] für ein System zweier linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$x' = a\, x + b\, y\,, \qquad y' = c\, x + d\, y \tag{5.0.5}$$

sich ergebende Abschätzung (5.0.4) untersucht — in (1.3.5) wird

$$\varkappa = \sqrt{K} + \sqrt{K-1}\,, \qquad \vartheta = H\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{K}}\right), \tag{5.0.6}$$

wobei

$$H = -\frac{a+d}{2}\,, \qquad K = \frac{(a+d) + (b-c)^2}{4\,(a\,d - b\,c)} \tag{5.0.7}$$

ist — und die entsprechende Ljapunovsche Funktion für das System

$$x' = y\,, \qquad y' = -k^2\,x - c\,y \tag{5.0.8}$$

dann [62] benutzt, um Abschätzungen für die Übergangsprozesse der Liénardschen Gleichung zu gewinnen.

Nun ist der Ansatz

$$V'(x, y, t) = -(x^2 + y^2)$$

zwar naheliegend, aber er liefert (vgl. [16]) durchaus nicht immer die günstigsten Abschätzungen. So ist die durch (5.0.6) gegebene Abklingkonstante ϑ meist kleiner als die Konstante

$$\vartheta_0 = -\max\,(\mathrm{Re}\,\lambda_i)$$

$\left[\lambda_{1,2}\text{ Eigenwerte der Matrix }\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]$, die für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ das tatsächliche Abklingen der Lösungen beschreibt. Man ist aber beispielsweise in der Regelungstechnik oft gerade an einem raschen Abklingen der Störungen, d. h. an Abschätzungen mit großem ϑ, interessiert.

Wir bestimmen daher hier Ljapunovsche Funktionen, die zumindest für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten das Abklingverhalten exakt (d. h. mit $\vartheta = \vartheta_0$) abzuschätzen gestatten, und untersuchen anschließend, in welchem Umfang mit Hilfe dieser Funktionen Ungleichungen

$$r(t) \leqq \varkappa\, r_0\, e^{-\vartheta\,(t - t_0)} \qquad (t \geqq t_0) \tag{5.0.9}$$

auch für die Störungen

$$r(t) = \sqrt{(x(t) - x^0(t))^2 + (y(t) - y^0(t))^2}$$

in nichtlinearen Systemen bewiesen werden können.

5.1. Ljapunovsche Funktionen für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten das System (5.0.5) unter der Voraussetzung, daß seine Ruhelage asymptotisch stabil ist, daß also die Hurwitzschen Bedingungen

$$a + d < 0\,, \qquad a\,d - b\,c > 0 \tag{5.1.1}$$

erfüllt sind. Als Ljapunovsche Funktion verwenden wir eine quadratische Form,

$$V(x, y) = P\,x^2 + 2\,Q\,x\,y + R\,y^2\,, \tag{5.1.2}$$

deren Koeffizienten wir aus der Forderung bestimmen, daß die Ungleichung (5.0.1) zu einer echten Gleichheit werden soll. Wir setzen also

$$V' = \varrho\, V\,. \tag{5.1.3}$$

Damit erhalten wir für P, Q, R das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} (2\,a - \varrho)\,P + \quad 2\,c\,Q \quad\quad\quad &= 0\,, \\ b\,P + (a + d - \varrho)\,Q + \quad c\,R \quad &= 0\,, \\ 2\,b\,Q \quad + (2\,d - \varrho)\,R &= 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{5.1.4}$$

das genau dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn die Koeffizientendeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a - \varrho & 2c & 0 \\ b & a + d - \varrho & c \\ 0 & 2b & 2d - \varrho \end{vmatrix}$$

verschwindet. Es ist

$$\Delta = [\varrho^2 - 2(a + d)\varrho + 4(a d - b c)](a + d - \varrho),$$

die Gleichung $\Delta = 0$ hat die Wurzeln

$$\varrho_{1,2} = a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4 b c}, \qquad \varrho_3 = a + d; \tag{5.1.5}$$

da

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4 b c}]$$

ist, gilt gerade (vgl. [34])

$$\varrho_1 = 2\lambda_1, \qquad \varrho_2 = 2\lambda_2, \qquad \varrho_3 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Wir haben drei Fälle zu unterscheiden:

I. Die Wurzeln λ_1, λ_2 sind konjugiert komplex, d. h., es gilt

$$(a - d)^2 + 4 b c < 0. \tag{5.1.6}$$

Dann ist sicher $b c < 0$, wir wählen o. B. d. A.

$$b > 0, \qquad c < 0. \tag{5.1.7}$$

Mit $\varrho = \varrho_1$ bzw. $\varrho = \varrho_2$ liefert (5.1.4) komplexe Werte für P, Q, R; mit $\varrho = \varrho_3$ dagegen erhält man

$$(a - d) P = -2 c Q, \qquad (d - a) R = -2 b Q,$$

mit $Q = \frac{1}{2}(a - d)$ ergibt sich

$$V(x, y) = -c x^2 + (a - d) x y + b y^2 \tag{5.1.8}$$

als Ljapunovsche Funktion mit der gewünschten Eigenschaft. Sie ist wegen (5.1.6), (5.1.7) stets positiv definit, es gilt

$$\mu_1 r^2 \leqq V(x, y) \leqq \mu_2 r^2 \qquad (r^2 = x^2 + y^2)$$

mit

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(b - c) \mp \sqrt{(b + c)^2 + (a - d)^2}\right];$$

für die Lösungen von (5.0.5) erhält man also die Abschätzung

$$r(t) \leqq \sqrt{\frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + (a - d)^2}}{b - c - \sqrt{(b + c)^2 + (a - d)^2}}}\, r_0\, e^{\frac{a + d}{2}(t - t_0)}. \tag{5.1.9}$$

II. Im Fall einer Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + d)$ versagt das Verfahren. Dann ist nämlich $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = a + d$, und die resultierende quadratische Form (5.1.8) ist wegen

$$(a - d)^2 + 4 b c = 0 \tag{5.1.10}$$

nur semidefinit. Tatsächlich ist eine Abschätzung mit $\vartheta = -\frac{1}{2}(a + d)$ wegen des Auftretens von Lösungen der Form $x(t) = t \exp\left[\frac{1}{2}(a + d) t\right]$ auch gar nicht möglich.

III. Wir untersuchen nun den Fall zweier verschiedener reeller Wurzeln $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Die für $\varrho = \varrho_3$ sich ergebende quadratische Form (5.1.8) ist wegen

$$(a - d)^2 + 4 b c > 0 \tag{5.1.11}$$

hier stets indefinit.

Wir setzen zunächst $b\,c \neq 0$ voraus (dann ist $\varrho_i \neq 2\,a,\ 2\,d$). Mit der Abkürzung

$$\sqrt{(a-d)^2 + 4\,b\,c} = D \qquad (>0) \tag{5.1.12}$$

und $Q = -2\,b\,c$ erhalten wir für $\varrho = \varrho_{1,2}$ aus (5.1.4) die beiden Formen

$$V_1(x,y) = c\,(a-d+D)\,x^2 - 4\,b\,c\,x\,y + b\,(d-a+D)\,y^2\,,$$
$$V_2(x,y) = c\,(a-d-D)\,x^2 - 4\,b\,c\,x\,y + b\,(d-a-D)\,y^2\,.$$

Sie genügen den Relationen

$$V_1' = \varrho_1\,V_1\,, \qquad V_2' = \varrho_2\,V_2\,, \tag{5.1.13}$$

sind aber beide nur semidefinit. Um eine definite Form zu erhalten, bilden wir eine Linearkombination

$$V = \frac{1+e}{2}\,V_1 + \frac{1-e}{2}\,V_2\,,$$

dabei wählen wir den Parameter e so, daß in der Ungleichung

$$\mu_1\,r^2 \leqq |V(x,y)| \leqq \mu_2\,r^2 \tag{5.1.14}$$

der Quotient μ_2/μ_1 (und damit in der Abschätzung (5.0.9) der Faktor $\varkappa$) möglichst klein wird. Diese Forderung führt — nach einigen Rechnungen — auf

$$e = \frac{(b+c)\,D}{(b-c)\,(a-d)}$$

und auf die Ljapunovsche Funktion

$$V(x,y) = c\left[a-d+\frac{(b+c)\,D^2}{(b-c)\,(a-d)}\right]x^2 - 4\,b\,c\,x\,y + b\left[d-a+\frac{(b+c)\,D^2}{(b-c)\,(a-d)}\right]y^2\,.$$

Für diese Funktion gilt wegen (5.1.13) stets

$$\varrho_2 \leqq \frac{V'}{V} \leqq \varrho_1 \qquad (<0) \tag{5.1.15}$$

(für $b\,c < 0$ haben V_1 und V_2 gleiches Vorzeichen und werden wegen $|e| < 1$ addiert, für $b\,c > 0$ haben sie entgegengesetzte Vorzeichen und werden, da jetzt $|e| > 1$ ist, voneinander subtrahiert); wesentlich ist der zweite Teil dieser Ungleichung

$$\frac{V'}{V} \leqq \varrho_1\,,$$

der mit (5.1.14) zu einer Abschätzung (5.0.9) mit

$$\vartheta = -\frac{1}{2}\,\varrho_1 = -\lambda_1 \qquad (=\vartheta_0)$$

führt. Durch Multiplikation mit dem Faktor

$$\frac{(a-d)\,(b-c)}{2\,b\,c}$$

läßt V sich (mit (5.1.12)) in die etwas einfachere Gestalt

$$\widetilde{V}(x,y) = [(a-d)^2 + 2\,c\,(b+c)]\,x^2 - 2\,(a-d)\,(b-c)\,x\,y + [(a-d)^2 + 2\,b\,(b+c)]\,y_2 \tag{5.1.16}$$

bringen; diese Form (die auch im zuvor ausgeschlossenen Fall $b\,c = 0$ verwendbar ist) ist wegen (5.1.11) stets positiv definit, es gilt

$$\tilde{\mu}_1\,r^2 \leqq \widetilde{V}(x,y) \leqq \tilde{\mu}_2\,r^2$$

mit

$$\tilde{\mu}_{1,2} = (a-d)^2 + (b+c)^2 \mp \sqrt{(b-c)^2\,[(a-d)^2 + (b+c)^2]}\,,$$

also

$$\varkappa^2 = \frac{\tilde{\mu}_2}{\tilde{\mu}_1} = \frac{\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} + |b-c|}{\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2} - |b-c|}\,.$$

Hier zeigt sich eine enge Übereinstimmung mit den Ergebnissen im Falle zweier konjugiert komplexer Wurzeln: dort hatten wir

$$\varkappa^2 = \frac{|b-c| + \sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}}{|b-c| - \sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}}$$

erhalten.

Zusammenfassend gilt

Satz 5.1.1. Die Lösungen des Systems (5.0.5), (5.1.1) genügen der Abschätzung

$$r(t) \leq \varkappa\, r_0\, e^{-\vartheta(t-t_0)}$$

mit

$$\varkappa = \sqrt{\frac{|b-c| + \sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}}{|b-c| - \sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}}} \tag{5.1.17}$$

und

$$\vartheta = -\max \operatorname{Re} \lambda_i = \begin{cases} -\frac{1}{2}(a+d) & \text{für} \quad (a-d)^2 + 4\,b\,c < 0\,, \\ -\frac{1}{2}\left[a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4\,b\,c}\right] & \text{für} \quad (a-d)^2 + 4\,b\,c > 0\,. \end{cases} \tag{5.1.18}$$

(Im Falle einer Doppelwurzel, $\lambda_1 = \lambda_2$, $(a-d)^2 + 4\,b\,c = 0$, ergibt sich $\varkappa = \infty$.)

Ein Vergleich mit den durch (5.0.6) gegebenen Konstanten $\varkappa$, ϑ wird möglich, wenn man sich auf Systeme (5.0.5) mit der Normierung

$$a\,d - b\,c = 1$$

beschränkt. Man hat dann für die Parameter H, K neben $K \geqq 1$ noch die [aus (5.0.7) resultierende] Bedingung $K \geqq H^2$ zu berücksichtigen: In der — in [59] betrachteten — (H, K)-Parameterebene existieren normierte Systeme nur zu Punkten mit

$$H > 0\,, \qquad K \geqq \max\{1, H^2\}\,.$$

Weiter ist

$$(a-d)^2 + 4\,b\,c = (a+d)^2 - 4\,(a\,d - b\,c) = 4\,(H^2 - 1)\,,$$

es entsprechen also dem Bereich $0 < H < 1$, $K \geqq 1$ Systeme mit zwei konjugiert komplexen charakteristischen Zahlen

$$\lambda_{1,2} = -H \pm i\sqrt{1 - H^2}\,,$$

dem Bereich $1 < H \leqq \sqrt{K}$ $(K > 1)$ Systeme mit zwei negativen reellen charakteristischen Zahlen

$$\lambda_{1,2} = -H \pm \sqrt{H^2 - 1}\,.$$

Für (5.1.18) ergibt sich somit die Darstellung

$$\vartheta = \begin{cases} H & \text{für} \quad 0 < H < 1\,, \\ H - \sqrt{H^2 - 1} & \text{für} \quad H \geqq 1\,; \end{cases}$$

dieser Wert ist für $K = 1$ mit (5.0.6) identisch, für alle $K > 1$ größer, also günstiger, als (5.0.6).

Für (5.1.17) erhält man [wegen $(b-c)^2 = 4\,(K - H^2)$ und $(a-d)^2 + (b+c)^2 = 4\,(K-1)$] den Ausdruck

$$\varkappa = \sqrt{\frac{\sqrt{K - H^2} + \sqrt{K-1}}{\left|\sqrt{K - H^2} - \sqrt{K-1}\right|}}\,, \tag{5.1.17'}$$

der für $K = 1$, für $H = 0$ und $H = \sqrt{2 - \frac{1}{K}}$ mit (5.0.6) zusammenfällt, im Bereich $\sqrt{2 - \frac{1}{K}} < H \leqq \sqrt{K}$ $(K > 1)$ kleiner, also ebenfalls günstiger, als (5.0.6) ist [dieser Bereich liegt im Gebiet $K > 1$ der (H, K)-Parameterebene zwischen der Hyperbel $K = 1/(2 - H^2)$ und der Parabel $K = H^2$].

Für Systeme mit $K < 1$, $0 < H < \sqrt{2 - \frac{1}{K}}$ ist der Wert (5.1.17′) größer als die durch (5.0.6) gegebene Konstante, in der resultierenden Abschätzung ist also zwar ϑ besser (wie dies ja bei der Auswahl der Ljapunovschen Funktion angestrebt wurde), aber man erkauft dies durch eine Verschlechterung der Schranke für die „Überschwingweite" $\varkappa$, die für $H \to 1$ sogar unendlich groß wird: die Punkte der Geraden $H = 1$ entsprechen den Systemen mit $\lambda_1 = \lambda_2$.

Bemerkung 5.1.1. Die Ljapunovschen Funktionen (5.1.8), (5.1.16) eignen sich auch dazu, für die Annäherung der Lösungen an die Ruhelage untere Schranken — also Ungleichungen der Form

$$r(t) \geqq \bar{\varkappa}\, r_0\, e^{-\bar{\vartheta}(t - t_0)} \tag{5.1.19}$$

nachzuweisen: Da für (5.1.8) $\frac{V'}{V} = \varrho_3$, für (5.1.16) [nach (5.1.15)] $\frac{V'}{V} \geqq \varrho_2$ gilt, erhält man in (5.1.19)

$$\varkappa = \frac{1}{\varkappa} = \sqrt{\frac{|b - c| - \sqrt{(a - d)^2 + (b + c)^2}}{|b - c| + \sqrt{(a - d)^2 + (b + c)^2}}}$$

und

$$\bar{\vartheta} = -\min \operatorname{Re} \lambda_i = \begin{cases} -\frac{1}{2}(a + d) & \text{für} \quad (a - d)^2 + 4\,b\,c < 0\,, \\ -\frac{1}{2}\left[a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4\,b\,c}\right] & \text{für} \quad (a - d)^2 + 4\,b\,c > 0\,. \end{cases}$$

Hierbei sind die Werte für $\bar{\vartheta}$ wieder die bestmöglichen.

5.2. Abschätzungen für die Übergangsprozesse nichtlinearer Gleichungen

Wir verwenden die im vorangegangenen Abschnitt gewonnenen Ljapunovschen Funktionen nun zur Herleitung von Exponentialabschätzungen für die Lösungen der in Kapitel 3 untersuchten nichtlinearen Gleichungen.

Zunächst betrachten wir das der Gleichung

$$x'' + f(x)\, x' + G(x, x', t) = 0 \tag{5.2.1}$$

entsprechende System (3.1.3). Das zugehörige System der linearisierten Variationsgleichungen (3.1.10′) konnte mit den Bezeichnungen (3.2.1) in der Gestalt (3.2.6),

$$u' = -s(t)\, u + w\,, \qquad w' = -[q(t) - r(t)\, s(t)]\, u - r(t)\, w\,, \tag{5.2.2}$$

geschrieben werden, dabei waren die Nichtlinearitäten durch (3.2.1)—(3.2.4) eingeschränkt.

Mit Hilfe der Ljapunovschen Funktion (3.2.5) konnte die asymptotische Stabilität der Ruhelage von (5.2.2) — und damit äußerste Stabilität für die Lösungen der Gleichung (5.2.1) — nachgewiesen werden, sofern die in (3.2.2)—(3.2.4) eingeführten Schranken p_i, q_i, r_i, s_i $(i = 1, 2)$ innerhalb der entweder durch (3.2.12), (3.2.13) oder durch (3.2.15), (3.2.17) gegebenen Schranken lagen.

Aus (3.2.12), (3.2.13) folgt mit

$$q_0 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \tag{5.2.3}$$

die Ungleichung

$$\sqrt{q_0 - \frac{1}{4}p_1^2} \geqq \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{2}p_1 + \Delta r\right)\left(\frac{1}{2}p_1 + \Delta s\right)} + \frac{1}{2}p_1\right]; \tag{5.2.4}$$

wir betrachten die durch diese Ungleichung erfaßten Systeme (5.2.2) und zeigen, daß hier alle Lösungen exponentiell gegen die Ruhelage streben, sobald man die Gleichung (3.2.13) durch

$$\sqrt{q_2} < \sqrt{q_1} + p_1$$

ersetzen kann. Es gilt

Satz 5.2.1. Die Koeffizienten des Systems (5.2.2) mögen den Beziehungen (3.2.2)—(3.2.4) und der Ungleichung (5.2.4) genügen. Gilt dann statt (3.2.13)

$$\sqrt{q_2} = \sqrt{q_1} + \alpha\, p_1 \qquad (0 \leqq \alpha < 1)\,, \tag{5.2.5}$$

so gestatten die Lösungen von (5.2.2) eine Abschätzung

$$\sqrt{u^2(t) + v^2(t)} \leqq \varkappa \sqrt{u_0^2 + v_0^2}\, e^{-\vartheta (t - t_0)} \tag{5.2.6}$$

mit

$$\varkappa = \max \left\{ \frac{\sqrt{4\, q_0 - p_1^2}}{2}\,,\ \frac{2}{\sqrt{4\, q_0 - p_1^2}} \right\} \tag{5.2.7}$$

und

$$\vartheta = \frac{1}{2} \left\{ p_2 - \sqrt{p_2^2 + p_1^2 \left[\alpha^2 \frac{4\, q_0 - \alpha^2\, p_1^2}{4\, q_0 - p_1^2} - 1 \right]} \right\}. \tag{5.2.8}$$

Beweis. Für ein System (5.2.2) mit konstanten Koeffizienten,

$$u' = -\,s\, u + w\,, \qquad w' = -\,(q - r\, s)\, u - r\, w\,,$$

hat man gemäß (5.1.8) als günstigste LJAPUNOVsche Funktion die quadratische Form

$$V(u, w) = (q - r\, s)\, u^2 + (r - s)\, u\, w + w^2$$

zu wählen; setzt man — analog zu (3.2.11) —

$$r = s = \frac{1}{2}\, p\,,$$

so erhält man

$$V(u, w) = \left(q - \frac{1}{4}\, p^2\right) u^2 + w^2\,.$$

Diese LJAPUNOVsche Funktion verwenden wir auch im nichtlinearen Fall, in dem die Koeffizienten in System (5.2.2) nicht mehr konstant sind: Wir setzen dann

$$p = p_1\,, \qquad q = q_0 = \frac{1}{2}\,(q_1 + q_2)\,,$$

also

$$V(u, w) = \left(q_0 - \frac{1}{4}\, p_1^2\right) u^2 + w^2\,. \tag{5.2.9}$$

Ist die Gleichung (3.2.13) erfüllt, dann ist die so gewählte LJAPUNOVsche Funktion mit der in Abschnitt 3.2 verwendeten Funktion (3.2.5) identisch: dort war

$$\sqrt{C} = \sqrt{q_1} + \frac{1}{2}\, p_1$$

zu setzen, mit (3.2.13) wird gerade $C = q_0 - \frac{1}{4}\, p_1^2$. Besteht statt dessen die Ungleichung (5.2.5), so läßt sich die — (3.2.7) entsprechende — Diskriminante

$$D(t) = 4 \left(q_0 - \frac{1}{4}\, p_1^2\right) r(t)\, s(t) - \left[q(t) - r(t)\, s(t) - \left(q_0 - \frac{1}{4}\, p_1^2\right) \right]^2$$

wie folgt abschätzen: Man zeigt wie in Abschnitt 3.2, daß (unter der Voraussetzung (5.2.4)) $D(t)$ für

$$r(t) = s(t) = \frac{1}{2}\, p_1$$

seinen kleinsten Wert annimmt, daß also

$$D(t) \geqq \frac{1}{4}\,(4\, q_0 - p_1^2)\, p_1^2 - [q(t) - q_0]^2$$

gilt, und berechnet aus (5.2.5)

$$q_2 - q_0 = q_0 - q_1 = \frac{1}{2}\, \alpha\, p_1 \sqrt{4\, q_0 - \alpha^2\, p_1^2}\,;$$

es folgt

$$D(t) \geqq D_0 = \frac{1}{4}\left[p_1^2\,(4\,q_0 - p_1^2) - \alpha^2\,p_1^2\,(4\,q_0 - \alpha^2\,p_1^2)\right].$$

Wir bestimmen nun eine Konstante $\varrho < 0$ so, daß $V' \leqq \varrho\,V$ gilt. Im linearen Fall ist [vgl. (5.1.5)] $\varrho = -p_1$; wir setzen im nichtlinearen Fall

$$\varrho = -\sigma\,p_1 \qquad (0 \leqq \sigma \leqq 1)$$

und bestimmen σ aus der Forderung

$$V' + \sigma\,p_1\,V \leqq 0\,.$$

Es ist hier

$$\begin{aligned} &V'(u, w, t) + \sigma\,p_1\,V(u, w) \\ &= -2\left\{\left(q_0 - \frac{1}{4}\,p_1^2\right)\left[s(t) - \frac{1}{2}\,\sigma\,p_1\right]u^2 + \left[q(t) - r(t)\,s(t) - \left(q_0 - \frac{1}{4}\,p_1^2\right)\right]u\,w \right. \\ &\left. + \left[r(t) - \frac{1}{2}\,\sigma\,p_1\right]w^2\right\}, \end{aligned}$$

die Diskriminante

$$D(t, \sigma) = \frac{1}{4}\,p_1^2\,(4\,q_0 - p_1^2)\,\sigma^2 - \frac{1}{2}\,p_1\,(4\,q_0 - p_1^2)\,[r(t) + s(t)]\,\sigma + D(t, 0)$$

$[D(t, 0) \equiv D(t)]$ läßt sich in der Form

$$D(t, \sigma) \geqq D_0(\sigma) = \frac{1}{4}\,p_1^2\,(4\,q_0 - p_1^2)\,\sigma^2 - \frac{1}{2}\,p_1\,p_2\,(4\,q_0 - p_1^2)\,\sigma + D_0$$

abschätzen; aus

$$D_0(\sigma) = 0$$

berechnet man

$$\sigma = \frac{p_2}{p_1} - \sqrt{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 + \alpha^2\,\frac{4\,q_0 - \alpha^2\,p_1^2}{4\,q_0 - p_1^2}} - 1\,.$$

Aus $\vartheta = \frac{1}{2}\,\sigma\,p_1$ ergibt sich die Konstante (5.2.8), den Wert (5.2.7) für $\varkappa$ entnimmt man direkt aus den Koeffizienten der Ljapunovschen Funktion (5.2.9).

Bemerkung 5.2.1. Die Voraussetzung (5.2.4) ist — wie auch die ihr zugrundeliegende Ungleichung (3.2.9) (vgl. Bemerkung 3.2.1) — nicht notwendig. Um (5.2.5) zu sichern, genügt es (vgl. (3.2.18)),

$$\sqrt{q_0 - \frac{1}{4}\,p_1^2} \geq \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{2}\,p_1 + \Delta r\right)\left(\frac{1}{2}\,p_1 + \Delta s\right)} - \frac{1}{2}\,p_1\right] + \frac{\alpha}{2}\,p_1 \tag{5.2.10}$$

vorauszusetzen. Die Ljapunovsche Funktion (5.2.8) liefert dann — wie in Bemerkung 3.2.1 festgestellt wurde — nicht mehr das (für eine quadratische Form) größtmögliche Intervall $[q_1, q_2]$, sichert aber im Falle einer linearen Rückstellkraft ($q(t) \equiv q_0$; $\alpha = 0$) die Abschätzung (5.2.6)—(5.2.8) im gesamten (durch (5.1.6) gegebenen) Bereich $q_0 \geqq \frac{1}{4}\,p_1^2$. Es ist dann

$$\vartheta = \frac{1}{2}\left[p_2 - \sqrt{p_2^2 - p_1^2}\right];$$

ist auch die Dämpfung linear ($p(t) \equiv p$), so wird $\sigma = 1$, $\vartheta = \frac{1}{2}\,p$ gemäß (5.1.9).

Mit Hilfe des Satzes 1.3.3 lassen sich die Resultate von Satz 5.2.1 unmittelbar auf die Lösungen der Gleichung (5.2.1) übertragen:

Satz 5.2.2. Für die Lösungen des zu (5.2.1) äquivalenten Systems (3.1.3) sei der Bereich B eine relative und endgültige Schranke, für jede Bewegung $(x(t), y(t)) \in B$ genüge das System der linearisierten Variationsgleichungen (3.1.10′) den Bedingungen des Satzes 5.2.1. Dann gilt für je zwei beliebige Lösungen $(x(t), y(t)) \in B$, $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in B$ eine Abschätzung

$$\sqrt{[x(t) - \bar{x}(t)]^2 + [y(t) - \bar{y}(t)]^2} \leqq \varkappa \sqrt{(x_0 - \bar{x}_0)^2 + (y_0 - \bar{y}_0)^2}\, e^{-\vartheta (t - t_0)}$$

mit den durch (5.2.7), (5.2.8) gegebenen Konstanten $\varkappa$, $\vartheta > 0$.

Bemerkung 5.2.2. Für Gleichungen (5.2.1) und Systeme (5.2.2) aus dem durch (5.2.10) ausgeschlossenen Koeffizientenbereich kann man ähnliche Abschätzungen mit Hilfe der Ljapunovschen Funktion (5.1.16) herleiten.

Zusammenfassung

In der Arbeit wird das asymptotische Verhalten der Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen

$$x'' + f(x, x', t) = 0 \tag{1}$$

untersucht, mit Hilfe der Ljapunovschen direkten Methode wird eine Reihe neuer Sätze bewiesen, in denen hinreichende Bedingungen für die Beschränktheit, asymptotische und exponentielle Stabilität der Lösungen von Gleichungen des Typs (1) angegeben werden.

Die Arbeit gliedert sich in fünf Kapitel, deren erstes die im folgenden benötigten Definitionen und Hilfssätze enthält.

Im zweiten Kapitel wird aus einer explizit zeitabhängigen Ljapunovschen Funktion ein allgemeines Kriterium für die zukünftige Beschränktheit der Lösungen der Liénardschen Gleichung

$$x'' + f(x)\, x' + g(x) = e(t) \tag{2}$$

abgeleitet, es ermöglicht die Formulierung sehr verschiedenartiger Systeme von Bedingungen für die in (2) enthaltenen nichtlinearen Funktionen und umfaßt insbesondere Gleichungen, in denen die Funktion $g(x)$ Unendlichkeitsstellen besitzt.

Das dritte Kapitel bringt zunächst einige Vergleichssätze, mit deren Hilfe das Stabilitätsverhalten von Lösungen der Gleichung (1) aus der Untersuchung einfacherer Gleichungen entschieden werden kann; durch Konstruktion geeigneter Ljapunovscher Funktionen für diese vereinfachten Gleichungen können anschließend hinreichende Bedingungen für äußerste Stabilität der Gleichung (1) gegeben werden.

Das vierte Kapitel ist einer eingehenderen Untersuchung der erzwungenen Schwingungen in Systemen gewidmet, die durch Gleichungen (1) der Form

$$x'' + f(x, x') = e(t) \tag{3}$$

mit einer periodischen Erregung $e(t) = e\,(t + T)$ beschrieben werden. Es wird gezeigt, daß die Kenntnis einer Näherung $\bar{x}(t)$ für eine nicht exakt bekannte periodische Lösung häufig die exakte Beurteilung des Stabilitätsverhaltens auch dann gestattet, wenn die in Kapitel 3 abgeleiteten Sätze nicht mehr anwendbar sind. Für Gleichungen

$$x'' + c\, x' + g(x) = e(t) \tag{4}$$

können Schranken für die Differenz zwischen genäherter und exakter periodischer Lösung — und daraus hinreichende Bedingungen für asymptotische Stabilität zumindest im Kleinen — explizit ausgerechnet werden. An zwei Beispielen (Duffingsche und Boittesche Gleichung) wird die Leistungsfähigkeit der so erhaltenen Kriterien demonstriert.

Im abschließenden fünften Kapitel werden hinreichende Bedingungen für exponentielle Stabilität der Lösungen der Gleichung (1) formuliert, die Koeffizienten der Exponentialabschätzungen für die Differenzen asymptotisch gleicher Lösungen werden aus den für die Nichtlinearitäten vorgeschriebenen Schranken bestimmt. Die hier verwendeten Ljapunovschen Funktionen wurden so konstruiert, daß sie bei linearen Gleichungen bestmögliche Abschätzungen liefern.

Literaturverzeichnis

[1] Ajzerman, M. A., Hinreichende Bedingungen für die Stabilität einer Klasse von dynamischen Systemen mit veränderlichen Parametern. PMM **15** (1951) 382—384 (russ.).

[2] Andronow, A. A., Witt, A. A., und Chaikin, S. E., Theorie der Schwingungen. Akademie-Verlag, Berlin 1965 (Übersetzung aus dem Russischen).

[3] Bhatia, N. P., Anwendung der direkten Methode von Ljapunow zum Nachweis der Beschränktheit und der Stabilität der Lösungen einer Klasse nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Abh. d. Dt. Akad. Wiss., Kl. Math., Phys., Techn., Jahrg. 1961, Nr. 5, Berlin 1962.

[4] Bibikov, J. N., Untersuchung eines dissipativen Systems zweiter Ordnung. Vestnik Leningradsk. Univ. **18**, Nr. 19 (Ser. Mat. Mech. Astron. Nr. 4), (1963) 14—26 (russ.).

[5] Bibikov, J. N., Über die Stabilität im Ganzen der erzwungenen Schwingungen eines Systems zweiter Ordnung. Zweiter Allunionskongreß über Theoretische und Angewandte Mechanik, Vortragsauszüge, Moskau 1964 (russ.).

[6] Bogoljubow, N. N., und Mitropolski, J. A., Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen. Akademie-Verlag, Berlin 1965 (Übersetzung aus dem Russischen).

[7] Cartwright, M. L., and Littlewood, J. E., On nonlinear differential equations of the second order; II. Ann. Math. **48** (1947) 472—494.

[8] de Castro, A., Sopra l'equazione differenziale delle oscillazioni non lineari. Riv. Mat. Univ. Parma **4** (1953) 133—143.

[9] Cesari, L., Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. Ergebn. Math. Grenzgeb., Neue Folge, Heft 16, Berlin 1959.

[10] Četaev, N. G., Stabilität der Bewegung. Moskau 1955 (russ.).

[11] Coddington, A., and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations. New York 1955.

[12] Dubošin, G. N., Zur Frage der Stabilität der Bewegung bezüglich konstant wirkender Störungen. Trudy gos. astron. Inst. Šternberg **14**, Nr. 1 (1940) (russ.).

[13] Forbat, N., Sur une condition suffisante de stabilité du mouvement d'un système non linéaire. Journal de Mécanique **1** (1962) 313—320.

[14] Forbat, N., Über die lokal asymptotische Stabilität der periodischen Bewegung eines nichtlinearen mechanischen Gebildes mit einem Freiheitsgrad. ZAMM **43** (1963) T 69—T 71.

[15] Forbat, N., et Huaux, A., Détermination approchée et stabilité locale de la solution périodique d'une équation différentielle non linéaire. Mém. et Publ. de la Soc. des Sciences, des Arts et des Lettres du Hainaut **76** (1962) 3—13.

[16] Hahn, W., Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov. Ergebn. Math. Grenzgeb., Neue Folge, Heft 22, Berlin 1959.

[17] Huaux, A., Sur l'existence d'une solution périodique de l'équation différentielle non linéaire: $\ddot{x} + (0,2)\,\dot{x} + x/(1-x) = (0,5)\cos\omega t$. R. c. Acad. Sci. **254**, 15 (1962) 2703—2705.

[18] Huaux, A., Sur l'existence d'une solution périodique de l'équation différentielle non linéaire $\ddot{x} + 0{,}2\,\dot{x} + x/(1-x) = 0{,}5\cos\omega t$. Bull. de l'Acad. roy. de Belgique (Cl. des Sci., V. Sér.) **48** (1962) 494—504.

[19] Huaux, A., Neue Anwendungen der direkten Methode von Ljapunov. ZAMM **43** (1963) T 74—T 79.

[20] Jakubovič, V. A., Abschätzung der charakteristischen Exponenten und Stabilitätskriterien für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. DAN SSSR **78**, 3 (1952) 345—348 (russ.).

[21] Kauderer, H., Nichtlineare Mechanik. Berlin 1958.

[22] Klotter, K., and Pinney, E., A comprehensive stability criterion for forced vibrations in nonlinear systems. J. appl. mech. **20** (1953) 9—12.

[23] Krasovskij, N. N., Über Stabilität nach der ersten Näherung. PMM **19** (1955) 516—530 (russ.).

[24] Krylov, A. N., u. Bogoljubov, N. N., Einführung in die Nichtlineare Mechanik. Kiew 1937 (russ.). Engl. Übers.: Introduction to non-lineare mechanics. Princeton 1947.

[25] LaSalle, J., and Lefschetz, S., Stability by Liapunov's direct method. With applications. New York 1961.

[26] Lefschetz, S., Differential equations: Geometric theory. New York 1957.

[27] Leonov, M. J., Über quasiharmonische Schwingungen. PMM **10** (1946) 575—580 (russ.).

[28] Levin, A. J., Über die Stabilität der Lösungen von Gleichungen zweiter Ordnung. DAN SSSR **141**, 6 (1961) 1298—1301 (russ.).

[29] Levinson, N., On the existence of periodic solutions for second order differential equations with a forcing term. J. Math. Phys. **22** (1943) 41—48.

[30] Levinson, N., Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order. Ann. Math. **45** (1944) 723—737.

[31] Ljapunov, A. M., Das allgemeine Problem der Stabilität einer Bewegung. Math. Gesellschaft, Charkow 1892 (russ.). Französ. Übers.: Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (2) **9** (1907) 203—474 (Neudruck: Ann. math. Studies **17**, Princeton 1949).

[32] Loud, W. S., Boundedness and convergence of solutions of $x'' + c\,x' + g(x) = e(t)$. Duke Math. J. **24** (1957) 63—72.

[33] Malkin, I. G., Stability in the case of constantly acting disturbances. PMM **8** (1944) 241—245 (russ., engl. Auszug).

[34] Malkin, J. G., Theorie der Stabilität einer Bewegung. Akademie-Verlag, Berlin 1959 (Übersetzung aus dem Russischen).

[35] Massera, J. L., The existence of periodic solutions of systems of differential equations. Duke Math. J. **17** (1950) 457—475.

[36] Minorsky, N., Introduction to non-linear mechanics. Ann Arbor 1946.

[37] Mizohata, S., and Yamaguti, M., On the existence of periodic solutions of the non-linear differential equation $\ddot{x} + a(x)\,\dot{x} + \varphi(x) = p(t)$. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A **27** (1952) 109—113.

[38] Müller, W., Exponentielle Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen. Mber. Dt. Akad. Wiss. **3** (1961) 617—622.

[39] Müller, W., Über die Beschränktheit der Lösungen der Cartwright-Littlewoodschen Gleichung. Math. Nachr. **29** (1965) 15—40.

[40] Nemyckij, V. V., und Stepanov, V. V., Qualitative Theorie der Differentialgleichungen. 2. Auflage, Moskau 1949 (russ.). Engl. Übers.: Qualitative theory of differential equations. Princeton 1960.

[41] Olech, C., Estimates of the exponential growth of solutions of a second order differential equation. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math., Astron., Phys. **7** (1959) 487—494.

[42] Opial, Z., Sur la stabilité des solutions périodiques et presque-périodiques de l'équation différentielle $x'' + F(x') + g(x) = p(t)$. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math., Astron., Phys. **7** (1959) 495—500.

[43] Opial, Z., Démonstration d'un théoreme de N. Levinson et C. Langenhop. Ann. Polon. Math. **7** (1960) 241—246.

[44] Opial, Z., Sur la stabilité asymptotique des solutions d'un système d'équations différentielles. Ann. Polon. Math. **7** (1960) 259—267.

[45] Opiał, Z., Sur les solutions de l'équation différentielle $x'' + h(x)\,x' + f(x) = e(t)$. Ann. Polon. Math. **8** (1960) 71—74.

[46] Opial, Z., Sur un théorème de C. E. Langenhop et G. Seifert. Ann. Polon. Math. **9** (1960) 145—155.

[47] Persidskij, K. P., Zur Theorie der Stabilität der Lösungen von Differentialgleichungen. Diss. Moskau 1946. Auszug: Usp. Mat. Nauk **1**, Nr. 1, 5—6 (1946) 250—255 (russ.).

[48] Pliss, V. A., Nichtlokale Probleme der Schwingungstheorie. Vestnik Leningradsk. Univ. **17**, Nr. 19 (Ser. Math., Mech., Astron. Nr. 3) (1962) 30—46 (russ.).

[49] Poincaré, H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris 1892.

[50] Poincaré, H., Mémoires sur les courbes définies par une équation différentielle. J. Math. Pures Appl. (3) **7** (1881) 375—422; (3) **8** (1882) 251—296; (4) **1** (1885) 167—224; (4) **2** (1886) 151—217.

[51] Reissig, R., Zur Theorie der erzwungenen Schwingungen. Math. Nachr. **13** (1955) 309—312.

[52] Reissig, R., Über eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung (1.—4. Mitteilung). Math. Nachr. **13** (1955) 313—318; **14** (1955) 65—71; **15** (1956) 39—45, 47—54.

[53] Reissig, R., Über die Existenz periodischer Lösungen für Differentialgleichungen 2. Ordnung mit einem Störungsglied. Math. Nachr. **14** (1955) 341—348.

[54] Reissig, R., Periodische Erregung eines einfachen Schwingers mit Selbststeuerung. Math. Nachr. **15** (1956) 181—190.

[55] Reissig, R., Kriterien für die Zugehörigkeit dynamischer Systeme zur Klasse D. Math. Nachr. **20** (1959) 67—72.

[56] Reissig, R., Ein Kriterium für asymptotische Stabilität. ZAMM **40** (1960) 94—99.
[57] Reissig, R., Über die asymptotische Stabilität im Ganzen bei der Duffingschen Gleichung. Math. Nachr. **22** (1960) 129—135.
[58] Reissig, R., Die Übergangsprozesse bei der Duffingschen Gleichung. Monatsber. Dt. Akad. Wiss. **2** (1960) 711—715.
[59] Reissig, R., Kriterien für die Regelgüte. Zmsr **3** (1960) 102—108.
[60] Reissig, R., Eine Methode zur Stabilitätsuntersuchung bei gewissen Differentialgleichungen. Monatsber. Dt. Akad. Wiss. **3** (1961) 1—5.
[61] Reissig, R., Über die Konstruktion einer Ljapunovschen Funktion für die verallgemeinerte Liénardsche Gleichung. Monatsber. Dt. Akad. Wiss. **4** (1962) 342—348.
[62] Reissig, R., Sansone, G., und Conti, R., Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen. Rom 1963.
[63] Reuter, G. E. H., On certain non-linear differential equations with almost periodic solutions. J. London Math. Soc. **26** (1951) 215—221.
[64] Reuter, G. E. H., A boundedness theorem for non-linear differential equations of the second order. Proc. Cambridge Philos. Soc. **47** (1951) 49—54.
[65] Reuter, G. E. H., Boundedness theorems for non-linear differential equations of the second order II. J. London Math. Soc. **27** (1952) 48—59.
[66] Seifert, G., On stability in the large for periodic solutions of differential systems. Ann. Math. **67** (1958) 83—89.
[67] Staržinskij, V. M., Hinreichende Bedingungen für die Stabilität eines mechanischen Systems mit einem Freiheitsgrad. PMM **16** (1952) 369—374 (russ.).
[68] Staržinskij, V. M., Übersicht über Arbeiten über Bedingungen für die Stabilität der trivialen Lösung eines Systems linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. PMM **18** (1954) 469—510 (russ.).
[69] Stoker, J. J., Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. New York 1950.
[70] Yoshizawa, T., Liapunov's function and boundedness of solutions. Funkcialaj Ekvacioj **2** (1959) 95—142.
[71] Zlámal, M., Über die Stabilität der nichtlinearen erzwungenen Schwingungen. Tschechoslov. Mat. J. **4** (79) (1954) 95—103.